Devoir Surveillé

Correction – Physique-chimie – DS 9

I Moteur Diesel à double combustion

1 - a - ⋆ La loi de Laplace s'applique pour une transformation adiabatique et réversible d'un gaz parfait. Elle indique, au choix : $pV^\gamma = \text{cst}$, $TV^{\gamma-1} = \text{cst}$, ou $p^{1-\gamma}T^\gamma = \text{cst}$.

⋆ La transformation $1 \to 2$ est une adiabatique réversible d'un gaz parfait. D'après la loi de Laplace en température et volume, $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$, on a :

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \quad \text{soit} \quad \boxed{T_2 = \beta^{\gamma-1}\, T_\mathrm{m} = 9{,}10 \times 10^2\,\mathrm{K}\,.} \tag{1}$$

⋆ On obtient également la pression p_2 à l'aide de $p_2 V_2^\gamma = p_1 V_1^\gamma$, d'où

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} \quad \text{soit} \quad \boxed{p_2 = \beta^{\gamma}\, p_\mathrm{m} = 52{,}8\,\mathrm{bar}\,.} \tag{2}$$

b - La transformation $2 \to 3$ est isochore, or $pV = nRT$ indique aussi que $p/T = nR/V$, avec ici n et V constants. On a donc :

$$\frac{p_3}{T_3} = \frac{p_2}{T_2}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{T_3 = T_2\,\frac{p_3}{p_2} = T_2\,\frac{p_M}{p_2} = 1{,}03 \times 10^3\,\mathrm{K}} \tag{3}$$

c - La transformation $3 \to 4$ est isobare.
On a $pV = nRT$, donc $V/T = nT/p$, et comme n et p sont constant, il vient que V/T est constant :

$$\frac{V_4}{T_4} = \frac{V_3}{T_3} \quad \text{d'où} \quad \boxed{V_4 = V_3\,\frac{T_4}{T_3} = V_m\,\frac{T_M}{T_3}.} \tag{4}$$

d - La transformation $4 \to 5$ est adiabatique réversible pour un gaz parfait, donc la loi de Laplace s'applique :

$$T_5 V_5^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1} \quad \text{d'où} \quad T_5 V_M^{\gamma-1} = T_M V_4^{\gamma-1} \quad \text{d'où} \quad T_5 = \left(\frac{V_4}{V_M}\right)^{\gamma-1} T_M. \tag{5}$$

On utilise l'expression précédente pour V_4, d'où :

$$T_5 = \left(\frac{V_m}{V_M}\frac{T_M}{T_3}\right)^{\gamma-1} T_M, \quad \text{soit} \quad \boxed{T_5 = \left(\frac{1}{\beta}\frac{T_M}{T_3}\right)^{\gamma-1} T_M = 8{,}83 \times 10^2\,\mathrm{K}.} \tag{6}$$

2 - a - ⋆ Pour un système fermé entre deux états d'équilibre, on a $\Delta U = W + Q$, avec W et Q le travail et le transfert thermique reçu par le système.

⋆ Dans le cas d'une évolution isobare, ceci peut s'écrire $\Delta H)W' + Q$, avec W' le travail reçu autre que celui des forces de pression.

b - Transformation $2 \to 3$, premier principe au système fermé {air} :

$$\Delta U \underset{\text{1er ppe}}{=} W_{2\to3} + Q_{2\to3} \underset{\text{isochore}}{=} 0 + Q_{2\to3} \tag{7}$$

Or pour un gaz parfait : $\Delta U = C_V \Delta T_{2\to3} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_3 - T_2)$. D'où

$$\frac{nR}{\gamma-1}(T_3 - T_2) = Q_{2\to3} \quad \text{et} \quad q_{2\to3} = \frac{Q_{2\to3}}{m} = \frac{nR}{m(\gamma-1)}(T_3 - T_2), \tag{8}$$

soit avec $M = m/n$:

$$\boxed{q_{2\to3} = \frac{R}{M(\gamma-1)}(T_3 - T_2).} \tag{9}$$

c - Transformation $3 \to 4$, premier principe au système fermé {air}, version isobare :

$$\Delta H \underset{\text{1er ppe}}{=} W'_{3\to4} + Q_{3\to4} = 0 + Q_{3\to4} \tag{10}$$

car il n'y a pas d'autres travaux que les forces de pression (donc $W' = 0$).
Or pour un gaz parfait : $\Delta H = C_p \Delta T_{3\to4} = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}(T_4 - T_3)$. D'où

$$\frac{nR\gamma}{\gamma-1}(T_4 - T_3) = Q_{3\to4} \quad \text{et} \quad q_{3\to4} = \frac{Q_{3\to4}}{m} = \frac{nR\gamma}{m(\gamma-1)}(T_4 - T_3), \tag{11}$$

soit avec $M = m/n$:

$$\boxed{q_{3\to4} = \frac{R\gamma}{M(\gamma-1)}(T_4 - T_3).} \tag{12}$$

d - On en déduit $\boxed{q_c = \dfrac{R}{M(\gamma-1)}[(T_3 - T_2) + \gamma(T_4 - T_3)] = 1{,}14 \times 10^3\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}}\,.}$

3 - Comme $5 \to 1$ est une isochore d'un gaz parfait, on a

$$\Delta U_{5\to1} \underset{\text{1er ppe}}{=} 0 + Q_{5\to1} \quad \text{et} \quad \Delta U_{5\to1} \underset{\text{GP}}{=} \frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_5) \tag{13}$$

d'où par le même raisonnement que précédemment

$$\boxed{q_\mathrm{f} = \frac{R}{M(\gamma-1)}(T_1 - T_5) = -4{,}21 \times 10^2\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}}\,.} \tag{14}$$

4 - D'après le premier principe appliqué au système fermé {air} sur l'ensemble du cycle,

$$Q_\mathrm{f} + Q_\mathrm{c} + W_\mathrm{cycle} = 0 \quad \text{donc en divisant par } m \ : \quad \boxed{w_\mathrm{cycle} = -q_\mathrm{f} - q_\mathrm{c} = -7{,}2 \times 10^2\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}}\,.} \tag{15}$$

Ce travail est négatif, ce qui est normal car il s'agit d'un moteur : il ne reçoit pas un travail, il en fournit un au milieu extérieur, donc $w_\text{reçu} < 0$.

5 - Le rendement du moteur est défini par $\eta = \dfrac{\text{utile}}{\text{couteux}}$, avec la grandeur couteuse qui est la chaleur reçue lors de la combustion (q_c), et la grandeur utile qui est le travail fournit au cours du cycle ($-w_\mathrm{cycle}$, signe moins pour avoir une grandeur positive). D'où :

$$\boxed{\eta = |\frac{w}{q_\mathrm{c}}| = -\frac{w}{q_\mathrm{c}} = 63\,\%\,.} \tag{16}$$

C'est une valeur élevée, mais qui a été obtenue avec une modélisation très idéalisée des transformations. En pratique, l'ordre de grandeur du rendement d'un moteur diesel de voiture est plutôt de 30 %.

II Mesure de la pesanteur terrestre

Extrait et adapté de CCP TSI 2010.

II.1 Questions introductives

1. **a -** L'unité de J_{Oz} est le $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$.

b - Le moment d'inertie est d'autant plus grand que la masse du solide est élevée et qu'elle est répartie loin de l'axe considéré.

Ici on a donc $J_{Oz,2} < J_{Oz,1} = J_{Oz,3} < J_{Oz,4}$.

2. Pour un solide en rotation autour d'un axe Oz fixe à la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$, dans un référentiel galiléen, et soumis à des forces $\vec{F_i}$, on a :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \sum_i M_{Oz}(\vec{F_i}),}$$

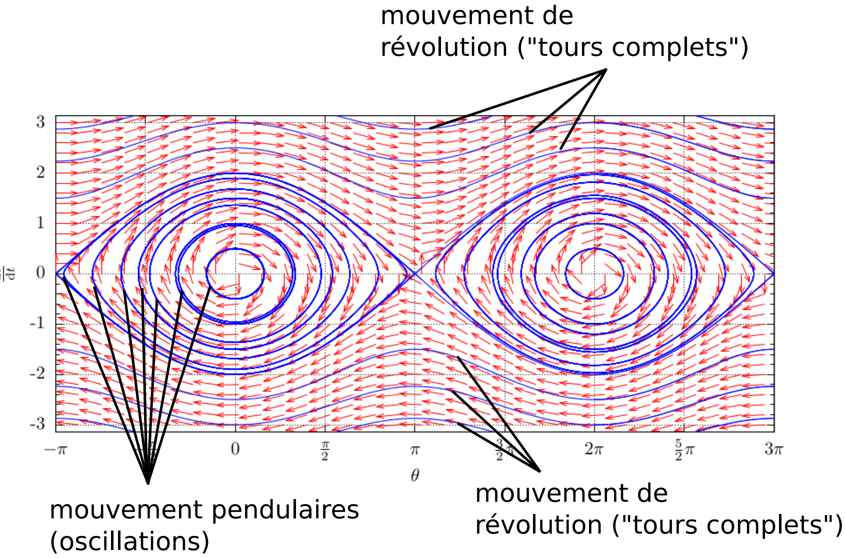
avec $M_{Oz}(\vec{F_i})$ le moment de la force $\vec{F_i}$ selon l'axe Oz. On peut aussi écrire $\sigma Oz = J_{Oz}\dot{\theta}$.

II.2 Utilisation d'un pendule sans ressort de rappel

3. La trajectoire d'un point quelconque de ce pendule est un arc de cercle dont le centre est sur l'axe Oz, et la distance au centre est $R = OM$ constante.

On a donc $\boxed{v = R\dot{\theta} = OM\dot{\theta}.}$

4. Voir ci-contre (et aussi fin du chapitre 5 de mécanique). Il n'est pas nécessaire de tracer les flèches. On rappelle aussi que le portrait de phase représente les trajectoires dans le plan $(\theta,\dot{\theta})$, et qu'il est périodique dans la direction θ de période 2π.



5. **a -** ⋆ Système : solide.

⋆ Référentiel : terrestre supposé galiléen.

⋆ Bilan des actions :

- Action de la liaison pivot, de moment nul car on néglige tout frottement.
- Action du poids, de résultante $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_x$ au point G.
  Le bras de levier de cette force est $a\sin\theta$. Tel que sur le dessin de l'énoncé où on a bien $\theta > 0$, $\vec{P}$ tend à faire tourner le solide dans le sens qui est contraire à celui de Oz d'après la règle du tire-bouchon (ou de la main droite), donc dans ce cas là le moment est négatif. (voir ci-dessous pour un autre calcul)
  On a donc $M_{Oz}(\vec{P}) = -a\sin\theta \times mg = -mga\sin\theta$.

⋆ Le moment cinétique s'exprime comme $\sigma_{Oz} = J\dot{\theta}$.

⋆ D'après le théorème du moment cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = M_{Oz}(\vec{P}), \qquad \text{d'où} \quad \boxed{J\ddot{\theta} = -mga\sin\theta.} \tag{17}$$

Remarque : On peut aussi calculer le moment de $\vec{P}$ de façon plus mathématique :

$$\begin{aligned}
M_{Oz}(\vec{P}) &= [\overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}] \cdot \vec{e}_z \\
&= [(a\cos\theta\vec{e}_x + a\sin\theta\vec{e}_y) \wedge mg\vec{e}_x] \cdot \vec{e}_z \\
&= mga[\sin\theta\, \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x] \cdot \vec{e}_z \\
&= mga[\sin\theta\,(-\vec{e}_z)] \cdot \vec{e}_z \\
&= -mga\sin\theta.
\end{aligned}$$

b - Pour $\theta \ll 1$, on a $\sin\theta \sim \theta$, l'équation précédente devient donc $J\ddot{\theta} = -mga\theta$, soit sous forme canonique :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{mga}{J}\,\theta.}$$

On reconnaît une équation du type oscillateur harmonique, de pulsation $\omega^2 = \dfrac{mga}{J}$, et donc de période

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}.}$$

6. a - On a

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg'a}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m(g+\Delta g)a}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg(1+\frac{\Delta g}{g})a}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}\left(1+\frac{\Delta g}{g}\right)^{-1/2}.$$

On a bien à droite quelque chose de la forme $(1+\varepsilon)^\alpha$ (avec $\alpha = -1/2$ et $\varepsilon = \Delta g/g$) qui est équivalent à $1 + \alpha\varepsilon$ pour ε petit.

Donc $T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mga}}\left(1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta g}{g}\right)$.

On reconnaît $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mga}}$ dans cette expression, d'où : $\boxed{T' = T\left(1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta g}{g}\right).}$

b - La sensibilité est $s = \dfrac{\Delta T}{T} = \dfrac{T'-T}{T} = \dfrac{T\left(1-\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}\right) - T}{T}$,

$$\text{d'où } \boxed{s = -\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}.}$$

II.3 Utilisation d'un pendule avec ressort spiral de rappel

7. L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit, à une constante près choisie nulle : $E_{\text{p,pes}} = mgx_G$ avec x_G l'altitude du centre de masse du solide (l'axe Ox est bien vers le haut, d'où un signe $+$).

On a ici $x_G = a\cos\theta$, d'où $\boxed{E_{\text{p,pes}} = mga\cos\theta}$.

8. a - L'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe Oz fixe est $E_c = \dfrac{1}{2}J\dot{\theta}^2$, avec J le moment d'inertie autour de l'axe Oz.

On a donc ici

$$\boxed{E_m = E_c + E_{\text{p,pes}} + E_{\text{p,ressort}} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mga\cos\theta + \frac{1}{2}K\theta^2.}$$

b - Les forces qui s'exercent sur le pendule sont le poids et l'action du ressort, qui sont conservatives, et l'action de liaison en O, qui est supposée parfaite et donc ne travaille pas. En conséquence, l'énergie mécanique se conserve : $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$.

On a donc, en dérivant l'équation précédente par rapport au temps :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}J\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}^2 + mga\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\theta + \frac{1}{2}K\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta^2 \\ &= \frac{1}{2}J\,2\ddot{\theta}\dot{\theta} - mga\dot{\theta}\sin\theta + \frac{1}{2}K\,2\dot{\theta}\theta, \end{aligned}$$

$$\text{soit : } \boxed{\ddot{\theta} - \frac{mga}{J}\sin\theta + \frac{K}{J}\theta = 0.}$$

9. a - Pour θ petit, on a $\sin\theta \sim \theta$, et l'équation du mouvement devient donc

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{K - mga}{J}\right)\theta = 0.$$

On reconnaît l'équation de l'oscillateur harmonique, de pulsation $\omega^2 = \dfrac{K - mga}{J}$, à condition d'avoir $\dfrac{K - mga}{J} > 0$, et donc d'avoir $\boxed{K > mga}$.

b - On vient de montrer que la pulsation est $\omega^2 = \dfrac{K - mga}{J}$, donc la période des oscillations est $T = 2\pi/\omega$, soit

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{K - mga}}.}$$

10. a -

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^2} - \frac{1}{T'^2} &= \frac{1}{T^2} - \frac{1}{(T + \Delta T)^2} \\ &= \frac{1}{T^2} - \frac{1}{T^2}\frac{1}{\left(1 + \dfrac{\Delta T}{T}\right)^2} \\ &= \frac{1}{T^2} - \frac{1}{T^2}\left(1 - 2\frac{\Delta T}{T}\right) \quad \text{(développement limité car } \Delta T \ll T\text{)} \\ &= \boxed{2\frac{\Delta T}{T^3}} \end{aligned}$$

b - On a $\dfrac{1}{T^2} = \dfrac{1}{4\pi^2}\dfrac{K - mag}{J}$, et donc $\dfrac{1}{T'^2} = \dfrac{1}{4\pi^2}\dfrac{K - mag - ma\Delta g}{J}$.

$$\text{Donc : } \boxed{\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T'^2} = \frac{ma\Delta g}{4\pi^2 J}.}$$

c - On combine les résultats des deux questions précédentes :

$$2\frac{\Delta T}{T^3} = \frac{ma\Delta g}{4\pi^2 J},$$

et on isole $\Delta T/T$ pour obtenir la sensibilité :

$$s_1 = \frac{\Delta T}{T} = \frac{T^2}{2}\frac{ma\Delta g}{4\pi^2 J},$$

$$\text{soit } \boxed{s_1 = \frac{ma\Delta g}{2(K - mga)}.}$$

11. On veut que $|s_1| > |s|$, soit $\dfrac{ma|\Delta g|}{2(K - mga)} > \dfrac{|\Delta g|}{2g}$, ce qui est possible si $K - mga > gma$,

$$\text{donc si } \boxed{K < 2mga.}$$

En fait, on peut avoir une sensibilité aussi grande que voulue : il suffit de prendre K juste supérieur à mga, par exemple $K = mga + \delta$ avec $\delta > 0$ mais petit, et alors $|s_1| = \dfrac{ma|\Delta g|}{2\delta}$ peut être très grand. Ceci correspond à une période T très grande.