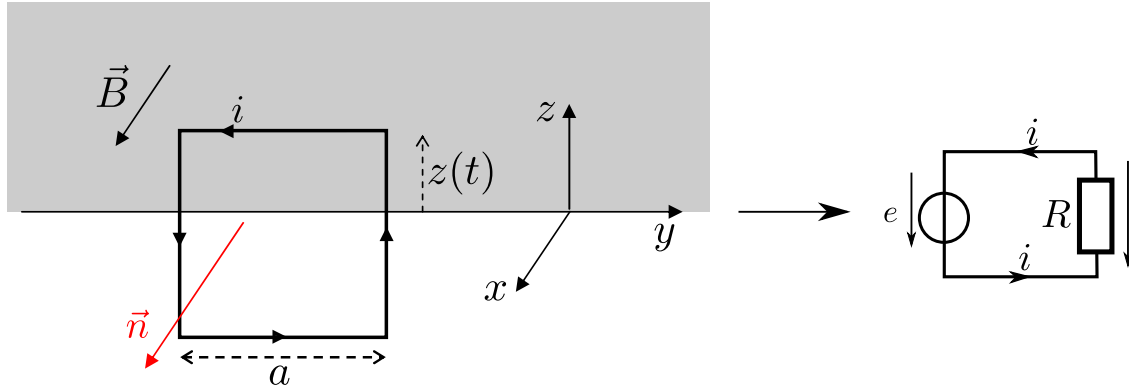


I Amortissement électromagnétique [●○○]



- 1 - (i) Orientation : on repère le courant dans le sens de la flèche indiquée sur le schéma. D'après la règle de la main droite, la normale à la surface du contour est donc selon $+\vec{e}_x$.
- (ii) Flux de \vec{B} à travers le circuit : $\Phi = \vec{B} \cdot S\vec{n} = az(t) B_0$ (attention à ne prendre en compte que la surface où \vec{B} est non nul).
- (iii) Circuit électrique équivalent : juste une résistance et un générateur en série. Le générateur a une fem donnée par la loi de Faraday (en convention générateur, donc dans le sens du courant) :

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -a\dot{z} B_0.$$

- (iv) Loi des mailles dans ce circuit : $e(t) = Ri$. On en déduit $i(t) = -\frac{a\dot{z} B_0}{R}$.

- 2 - La force de Laplace ne s'exerce que là où il y a un champ magnétique.

- Sur le côté gauche et le côté droit : $\vec{F} = iz\vec{e}_z \wedge \vec{B} + iz(-\vec{e}_z) \wedge \vec{B} = \vec{0}$.
- Sur le côté supérieur : $\vec{F} = ia(-\vec{e}_y) \wedge \vec{B} = iaB_0 \vec{e}_z$.

D'où la résultante totale : $\vec{F} = -\frac{a^2\dot{z} B_0^2}{R} \vec{e}_z$.

On remarque qu'elle est opposée à la vitesse (selon $-\dot{z}\vec{e}_z$), ce qui est attendu à cause de la loi de Lenz : les effets de l'induction s'opposent à leur création, donc ici la force de Laplace s'oppose à la mise en mouvement.

- 3 - On veut mettre cette résultante sous la forme $\vec{F} = -h\vec{v}$.

C'est bien le cas ici avec $h = \frac{(aB_0)^2}{R}$. $h > 0$, on a donc bien une force qui s'oppose à la vitesse et qui sert d'amortissement.

Avec les valeurs données, il faut $B_0 = \frac{\sqrt{Rh}}{a} = 10 \text{ T}$. Ce n'est pas réalisable avec un aimant permanent, mais possible avec un électroaimant assez puissant.

II Étude d'un haut-parleur



1 - Force de Laplace.

Si $i > 0$, la règle de la main droite (pouce sur i , index sur \vec{B} , le majeur donne \vec{F}_L) indique que la bobine se déplace vers les z négatifs.

Équation mécanique

2 - On étudie l'ensemble des parties mobiles, de masse m , dans un référentiel galiléen.

Bilan des forces :

- Force de frottement $\vec{f} = -\lambda\vec{v} = -\lambda v\vec{e}_z$.
- Force de rappel du ressort $\vec{F}_r = -k(l - l_0)\vec{e}_z = -kz\vec{e}_z$ car on voit sur le schéma que $l - l_0 = z$.
- Force de Laplace $\vec{F}_L = -ilB_0\vec{e}_z$.
- Forces de réaction verticale et poids qui ne vont pas intervenir sur \vec{e}_z .

Principe fondamental de la dynamique, directement projeté sur \vec{e}_z :

$$m \frac{dv}{dt} = -ilB_0 - \lambda v - kz.$$

3 - On a $v = \frac{dz}{dt}$, et donc en complexes $\underline{v} = j\omega \underline{z}$.

4 - On passe l'équation précédente en complexes :

$$j\omega m \underline{v} = -lB_0 \underline{i} - \lambda \underline{v} - k \underline{z}.$$

On utilise $\underline{z} = \frac{\underline{v}}{j\omega}$ et on obtient rapidement :

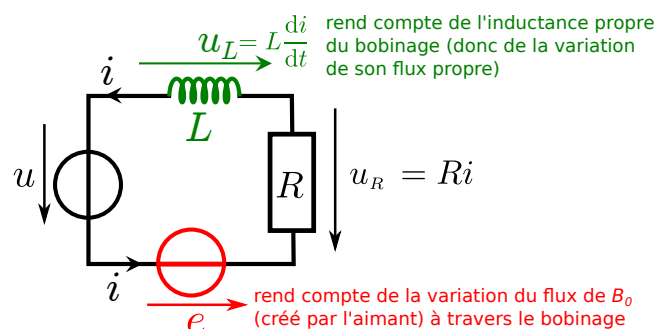
$$\left(\lambda + j\omega m + \frac{k}{j\omega} \right) \underline{v} = -lB_0 \underline{i}.$$

Équation électrique

5 - $\vec{F}_L \cdot \vec{v} + ei = 0$ s'écrit aussi $ei = -(-ilB_0) \times v$, d'où $e = vB_0l$.

6 - Schéma électrique équivalent : cf ci-contre.

Remarque : On traite séparément l'effet de la variation du flux créé par l'aimant à travers le bobinage (fem e , toujours en convention générateur, c'est elle que la question précédente permet de trouver) et l'effet de la variation du flux propre du bobinage (inductance L , toujours en convention récepteur).



La loi des mailles donne : $u + e = Ri + L \frac{di}{dt}$. Or $e = vB_0l$, donc on a

$$u = -vB_0l + Ri + L \frac{di}{dt}.$$

7 - En passant en complexe on en déduit immédiatement :

$$\underline{u} = (R + jL\omega)\underline{i} - B_0l\underline{v}. \quad (1)$$

Étude de la réponse en fréquence

8 - Un haut-parleur parfait aurait une réponse plate : $|G|(\omega) = \text{cst}$, car il n'amplifierait ni ne diminuerait certaines fréquences par rapport à d'autres.

Ici on voit que ce n'est pas le cas, et que les fréquences intermédiaires seront amplifiées.

On s'y attendait, il y a en fait une résonance proche de la pulsation du système mécanique, $\omega = \sqrt{k/m}$. Elle est toutefois assez large, et elle le sera d'autant plus que les frottements sont importants.

On constate aussi que $|G|$ tend vers 0 à hautes fréquences : le haut-parleur ne peut plus suivre les variations de tension.

Étude énergétique

9 -

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = \underbrace{-ilB_0}_{=F_L} - kz - \lambda v \\ u = \underbrace{-vB_0l}_{=-e} + Ri + L \frac{di}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mv \frac{dv}{dt} = -ilB_0v - kzv - \lambda v^2 \\ ui = -vB_0li + Ri + Li \frac{di}{dt} \end{cases}$$

On soustrait les deux équations afin d'éliminer le terme de couplage vB_0il :

$$ui - mv \frac{dv}{dt} = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} + kzv + \lambda v^2$$

On utilise $v \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt}$, $i \frac{di}{dt} = \frac{1}{2} \frac{di^2}{dt}$, $zv = z \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dz^2}{dt}$, et on isole ui :

$$ui = Ri^2 + \lambda v^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} kz^2 + \frac{1}{2} mv^2 \right).$$

On voit donc que la puissance électrique fournie au haut-parleur ($u \times i$) se répartie en :

- une puissance Ri^2 perdue par effet Joule,
- une puissance λv^2 perdue par frottement, qui est en fait cédée à l'air et constitue la puissance de l'onde sonore émise (si on néglige les frottements bobine/aimant et autres).
- un gain d'énergie potentiel du ressort, d'énergie cinétique de l'ensemble mobile, et d'énergie magnétique stockée par la bobine.

Si on moyenne sur une période, ces trois termes sont nuls.

III Machine à courant continu à entrefer cylindrique [●●○]

1 - Équation électrique : loi des maille, $U = Ri - e$, soit $U = Ri + K\omega$.

2 - Équation mécanique : TMC aux parties en rotation, $\frac{d(J\omega)}{dt} = \Gamma_L - \Gamma_r$, soit $J\frac{d\omega}{dt} = Ki - \Gamma_r$.

3 - Étude en régime permanent :

a - Comme $\omega = \text{cst}$, l'équation mécanique devient $\Gamma_r = Ki$.

On isole i dans l'équation mécanique : $i = \frac{\Gamma_r}{K}$, et on l'injecte dans l'équation électrique :

$$U = R\frac{\Gamma_r}{K} + K\omega, \quad \text{d'où} \quad \Gamma_r = \frac{K}{R}U - \frac{K^2}{R}\omega.$$

b - Le point de fonctionnement du moteur se trouve à l'intersection des deux courbes, puisqu'il faut que $\Gamma_r(\omega) = \Gamma_L(\omega)$.

c - Γ_0 est le couple fournit par le moteur au démarrage, c'est-à-dire lorsque $\omega \simeq 0$.

Pour que le moteur démarre, il faut que $\Gamma_0 > \Gamma_r(0)$. On a $\Gamma_0 = \frac{KU}{R}$, donc on peut jouer sur U par exemple.

d - Il faut résoudre $\alpha\omega = \Gamma_r = \frac{K}{R}U - \frac{K^2}{R}\omega$ pour trouver

$$\omega = \frac{KU}{K^2 + \alpha R} = 8,3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

On en déduit $\Gamma_r = \alpha\omega = 41,5 \text{ N} \cdot \text{m}$ et $i = \frac{\alpha\omega}{K} = 8,3 \text{ A}$.

Le rendement s'écrit

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_{\text{mécanique}}}{\mathcal{P}_{\text{fournie générateur}}} = \frac{\Gamma_r\omega}{Ui} = 0,83.$$

4 - Étude en régime transitoire :

a - On reprend le TMC écrit ci-dessus : $J\frac{d\omega}{dt} = Ki - \Gamma_r$, et on remplace i par l'expression qui vient de l'équation électrique, c'est-à-dire $i = \frac{U}{R} - \frac{K}{R}\omega$:

$$J\frac{d\omega}{dt} = K\left(\frac{U}{R} - \frac{K}{R}\omega\right) - \Gamma_r, \quad \text{soit} \quad \frac{d\omega}{dt} + \frac{K^2}{RJ}\omega = \frac{KU}{RJ} - \frac{\Gamma_r}{J}.$$

On pose $\tau = \frac{RJ}{K^2}$, qui correspond au temps de réponse du moteur : il faut environ 3τ pour atteindre 95% de la vitesse de consigne.

b - Solution homogène : $\omega_H = Ae^{-t/\tau}$,

solution particulière obtenue pour $\omega = \text{cst}$, donc $\omega_p = \frac{U}{K} - \frac{R\Gamma_r}{K^2}$,

solution générale : $\omega = Ae^{-t/\tau} + \frac{U}{K} - \frac{R\Gamma_r}{K^2}$ et on obtient A en imposant $\omega(0) = 0$, d'où

$$\omega(t) = \left(\frac{U}{K} - \frac{R\Gamma_r}{K^2}\right) \left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

IV Machine synchrone

[●●○]

1 - Pour un moteur synchrone on a $\omega = \omega'$. L'angle $\theta = (\vec{n}, \vec{B})$ est donc constant une fois le régime permanent atteint.

2 - Le couple fourni par le moteur est $\vec{\Gamma}_L = \vec{n} \wedge \vec{B} = mB \sin \theta \vec{e}_z$.

3 - À vide, le couple fourni est nul, donc $\theta = 0$.

Dans le deuxième cas, on a $mB \sin \theta = \Gamma_c$, d'où $\theta = \arcsin \frac{\Gamma_c}{mB} = 0,42 \text{ rad} = 24^\circ$.

La puissance fournie par le moteur est $\mathcal{P} = \Gamma_c \times \omega = 0,65 \times (50 \times 2\pi) = 2,0 \times 10^2 \text{ W}$.

4 - La vitesse de rotation ne dépend pas de la charge. Elle est toujours donnée par la vitesse de rotation du champ produit par le stator (50 tours par seconde ici). C'est un des avantages du moteur synchrone.

On a $\Gamma_L = mB \sin \theta$. Le couple maximal est donc obtenu pour $\theta = \pi/2$, et donc $\Gamma_{\max} = mB = 16 \text{ N} \cdot \text{m}$.

V Machine asynchrone

[●●○]

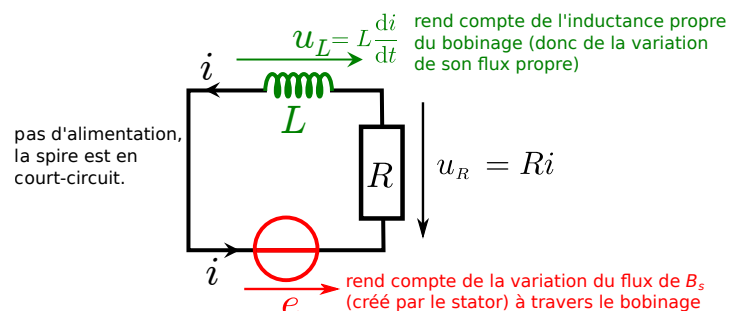
1 - Le flux du champ statorique \vec{B}_s à travers la spire est donné par : $\Phi(t) = \vec{B}_s \cdot \vec{n}S = B_0S \cos \Omega t$, car l'angle entre \vec{B}_s et \vec{n} est $\theta - \varphi = \omega_s t - \omega t = \Omega t$.

Ceci induit une fem $e = -\frac{d\Phi}{dt} = B_0S\Omega \sin \Omega t$.

On remarque que $e = 0$ si $\Omega = 0$.

Schéma électrique équivalent : cf ci-contre.

Remarque : On traite séparément l'effet de la variation du flux de \vec{B}_s à travers la spire (fem e , exprimée ci-dessus, toujours en convention générateur) et l'effet de la variation du flux propre du bobinage (inductance L , toujours en convention récepteur).



D'où l'équation

$$e = Ri(t) + L \frac{di}{dt}$$

Et en remplaçant e :

$$L \frac{di}{dt} + Ri(t) = B_0S\Omega \sin \Omega t$$

2 - ★ Pour $\omega > 0$, il faut $\Gamma_m > 0$ pour avoir un couple moteur, donc il faut $\omega < \omega_s$ (la puissance reçue par l'axe est $\Gamma_m \omega$, elle doit être positive pour un fonctionnement moteur). Ceci se comprend car alors la spire tourne plus lentement que le champ magnétique, et tend donc à le rattraper afin d'annuler les variations de \vec{B} dans son référentiel. D'où un couple positif qui tend à l'accélérer.

Remarque : Si $\omega < 0$, alors pour un fonctionnement moteur il faut encore une puissance reçue par l'axe $\Gamma_m \omega > 0$, donc cette fois il faut $\Gamma_m < 0$, donc $\omega > \omega_s$. Ce n'est pas compatible avec $\omega < 0$ car ici $\omega_s > 0$.

★ La valeur du couple lorsque ω tend vers 0 est le couple développé lors du démarrage du moteur.

★ Le couple moteur s'annule pour $\omega = \omega_s$, ce qu'on avait déjà prédit car alors le champ ne varie plus vu dans le référentiel de la spire.

★ Lorsque $\omega > \omega_s$, le couple moteur devient négatif. Ceci signifie qu'il devient un couple résistant. Il faut fournir un couple au moteur pour l'entraîner à $\omega > \omega_s$. La puissance qu'il délivre est également négative :

$\Gamma_m \omega < 0$, ce qui signifie qu'il faut lui fournir une puissance mécanique pour le faire tourner. Cette puissance sera nécessairement convertie en puissance électrique.

Ainsi, lorsqu'une machine asynchrone est entraînée au delà de la vitesse de synchronisme, elle fonctionne en générateur électrique.

Remarque : En fonctionnement génératrice il faut tout de même alimenter le stator pour produire le champ tournant. Mais on récupère davantage d'énergie qu'en fourni via cette alimentation.

3 - a. TMC aux parties en rotation :

$$\frac{d(J\omega)}{dt} = \Gamma_m(\omega) - \Gamma_r, \quad \text{soit} \quad \boxed{J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_m(\omega) - \Gamma_r.}$$

b. Au démarrage il faut $\Gamma_m(0) > \Gamma_r$, car ainsi $\frac{d\omega}{dt} > 0$ et ω augmente. Ainsi seuls les moteurs 2 et 3 peuvent démarrer sans aide auxiliaire.

c. En régime permanent on a $0 = J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_m(\omega) - \Gamma_r$, et donc $\Gamma_m(\omega) = \Gamma_r$. Les valeurs possibles pour ω sont données par l'intersection entre la courbe $\Gamma_m(\omega)$ et la courbe Γ_r .

Pour le moteur 1 on voit qu'il y a deux solutions.

★ Considérons la plus grande : on se place donc en ω^* tel que $\Gamma_m(\omega^*) = \Gamma_r$

Supposons que suite à une perturbation, ω augmente légèrement et prenne une valeur $\omega^+ > \omega^*$. Alors la courbe $\Gamma(\omega^+)$ passe en dessous de la courbe Γ_r : on a donc $\Gamma_m(\omega^+) - \Gamma_r < 0$, et donc $\frac{d\omega}{dt} < 0$ d'après le TMC. Donc ω diminue. Donc ω retourne vers la valeur initiale ω^* .

On peut faire le même raisonnement en supposant que ω diminue légèrement et prend une valeur $\omega^- < \omega^*$. Alors $\Gamma_m(\omega^-) - \Gamma_r > 0$ et donc $\frac{d\omega}{dt} > 0$ et donc ω augmente et rejoint la valeur initiale ω^* . Il s'agit bien d'un comportement stable.

★ Si on considère maintenant le point d'intersection le plus à gauche, le même type de raisonnement montre que si ω augmente, alors $\frac{d\omega}{dt} > 0$ et ω augmente encore : il s'agit d'un comportement instable.

4 - a. ★ Puissance mécanique délivrée :

$$\mathcal{P}_m = \Gamma_m \omega = \frac{1}{2} \frac{(B_0 S)^2 R \Omega \omega}{R^2 + (L \Omega)^2}.$$

★ Puissance dissipée par effet Joule :

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = R \langle i(t)^2 \rangle = R \times \frac{1}{2} \text{Re}(|\underline{i}|^2) = R \frac{I_0^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{R (B_0 S \Omega)^2}{R^2 + (L \Omega)^2}.$$

(on rappelle que l'expression de l'amplitude I_0 est donnée dans l'énoncé)

b. Rendement :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\mathcal{P}_m}{\mathcal{P}_m + \mathcal{P}_{\text{Joule}}} = \frac{\frac{(B_0 S)^2 R \Omega \omega}{R^2 + (L \Omega)^2}}{\frac{(B_0 S)^2 R \Omega \omega}{R^2 + (L \Omega)^2} + \frac{R (B_0 S \Omega)^2}{R^2 + (L \Omega)^2}} \\ &= \frac{\omega}{\omega + \Omega} \\ &\boxed{\eta = \frac{\omega}{\omega_s}.} \end{aligned}$$

c. Si $\omega = 0,95\omega_s$, alors le rendement est de 95%, ce qui est très bien.

Pour ceux qui sont en avance :

5 - a. On a $\sin \Omega t = \cos(\Omega t - \pi/2)$, donc l'équation s'écrit aussi

$$L \frac{di}{dt} + Ri = B_0 S \Omega \cos(\Omega t - \pi/2) \quad \text{et devient} \quad jL\Omega \underline{i} + R\underline{i} = B_0 S \Omega e^{j(\Omega t - \pi/2)}.$$

On isole \underline{i} :

$$\underline{i}(t) = \frac{B_0 S \Omega}{R + jL\Omega} e^{j(\Omega t - \pi/2)}.$$

b. On a donc bien
$$I_0 = |\underline{i}| = \frac{B_0 S |\Omega|}{\sqrt{R^2 + (L\Omega)^2}}.$$

6 - a.

$$\Gamma_m = \langle (\vec{m} \wedge \vec{B}_s) \cdot \vec{e}_z \rangle = \langle (iS\vec{n} \wedge \vec{B}_s) \cdot \vec{e}_z \rangle.$$

Or $\vec{n} \wedge \vec{B}_s = B_0 \sin \Omega t \vec{e}_z$ car Ωt est l'angle entre \vec{n} et \vec{B}_s .

On a donc bien $\Gamma_m = \langle i(t) g(t) \rangle$ avec $g(t) = SB_0 \sin \Omega t$.

b. Représentation complexe de $i(t)$: $\underline{i}(t) = \frac{B_0 S \Omega}{R + jL\Omega} e^{j(\Omega t - \pi/2)}.$

Représentation complexe de $g(t) = SB_0 \sin \Omega t = SB_0 \cos(\Omega t - \pi/2)$: $\underline{g}(t) = SB_0 e^{j(\Omega t - \pi/2)}.$

D'où la valeur moyenne :

$$\begin{aligned} \Gamma_m &= \langle i(t) g(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} (\underline{i} \underline{g}^*) \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{B_0 S \Omega}{R + jL\Omega} e^{j(\Omega t - \pi/2)} SB_0 e^{-j(\Omega t - \pi/2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{B_0^2 S^2 \Omega}{R + jL\Omega} \right) \\ &= \frac{B_0^2 S^2 \Omega}{2} \text{Re} \left(\frac{1}{R + jL\Omega} \frac{R - jL\Omega}{R - jL\Omega} \right) \\ &= \frac{B_0^2 S^2 \Omega}{2} \text{Re} \left(\frac{R - jL\Omega}{R^2 + (L\Omega)^2} \right) \end{aligned}$$

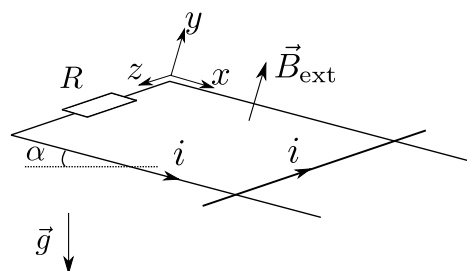
$$\Gamma_m = \frac{1}{2} \frac{B_0^2 S^2 \Omega R}{R^2 + (L\Omega)^2}.$$

Remarque : On peut aussi mener ce calcul en notations réelles, avec $g(t) = SB_0 \sin \Omega t$ et $i(t) = \text{Re}(\underline{i}(t))$ (à déterminer à partir de l'expression de $\underline{i}(t)$), mais c'est plus long.

VI Rails de Laplace inclinés



Pour poursuivre la discussion il faut orienter le circuit. On choisit le sens ci-contre, qui est tel que la normale sortante soit dans le même sens que \vec{B}_{ext} .



1 - Les rails étant inclinés, la barre mobile va glisser vers le bas, donc vers les x croissants.

Lorsque la barre glisse, la surface du circuit augmente. Donc le flux Φ de \vec{B}_{ext} à travers le circuit (qui est > 0 d'après notre choix) va augmenter.

D'après la loi de Faraday, ceci va créer une force électromotrice $-\frac{d\Phi}{dt}$ négative. Cette fem étant dans le sens de i , ceci signifie que le courant sera en fait négatif.

Enfin, ce courant (et le champ \vec{B}_{ext}) va produire sur la barre une force de Laplace orientée selon $-\vec{e}_x$. Ceci va donc retenir la barre. C'est conforme à la loi de modération de Lenz, qui indique que les effets (ici la force de Laplace) s'opposent aux causes qui les ont créés (ici la cause est le glissement de la barre mobile) : la force de Laplace s'oppose au glissement de la barre.

Remarque : On pouvait en dire moins et rester plus "intuitif" en énonçant seulement la loi de Lenz.

2 - ★ Étape 1 : orienter. C'est déjà fait.

★ Étape 2 : Flux du champ \vec{B}_{ext} à travers le circuit :

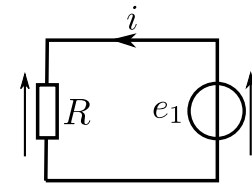
$$\Phi = \iint_S \vec{B}_{\text{ext}} \cdot d\vec{S} = \iint_S (B_{\text{ext}}\vec{e}_y) \cdot (dS\vec{e}_y) = B_{\text{ext}} \iint_S dS = B_{\text{ext}} \times ax.$$

★ Étape 3 : Schéma électrique équivalent.

On ajoute une fem est en convention générateur, qui remplace en quelque sorte la barre mobile. Le reste est inchangé.

La fem est donnée par la loi de Faraday :

$$e_1 = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_{\text{ext}}a\frac{dx}{dt} = -Bav \text{ avec } v \text{ la vitesse de la barre selon } \vec{e}_x.$$



★ Étape 4 : Loi des mailles, donc ici $e_1 = Ri$, soit l'équation électrique :

$$\boxed{-B_{\text{ext}}av = Ri.}$$

Comme $v > 0$ (la barre glisse vers le bas), on voit avec cette égalité que $i < 0$.

3 - Liste des forces :

- Force de Laplace, $\vec{F}_L = ia\vec{u} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$, avec \vec{u} vecteur sur la barre dans le sens de i , donc ici $\vec{u} = -\vec{e}_z$.

$$\text{On a donc } \vec{F}_L = -ia\vec{e}_z \wedge \vec{e}_y B_{\text{ext}} = iaB_{\text{ext}}\vec{e}_x.$$

- Poids de la barre $\vec{P} = m\vec{g}$.

Attention, \vec{g} est à la fois selon x et y . On a en fait

$$\vec{P} = mg(-\cos\alpha\vec{e}_y + \sin\alpha\vec{e}_x).$$

- Réaction du support $\vec{R} = R\vec{e}_y$.

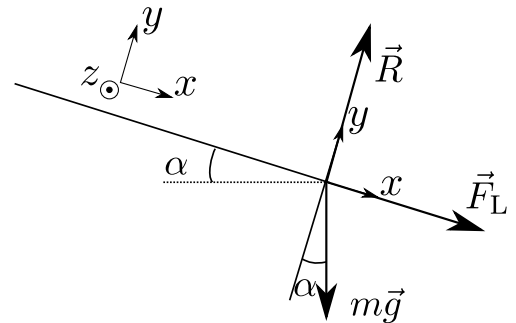
D'autre part, la vitesse est $\vec{v} = v\vec{e}_x$.

Le pfd indique que $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_L + \vec{P} + \vec{R}$,

$$\text{soit } m\frac{dv}{dt}\vec{e}_x = iaB_{\text{ext}}\vec{e}_x + mg(-\cos\alpha\vec{e}_y + \sin\alpha\vec{e}_x) + R\vec{e}_y.$$

On s'intéresse à la composante selon \vec{e}_x :

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = iaB_{\text{ext}} + mg\sin\alpha.} \quad (\text{équation mécanique})$$



4 - Dans l'équation mécanique, on remplace le courant i par l'expression $i = -B_{\text{ext}}av/R$ donnée par l'équation électrique. On a donc

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = -\frac{(aB_{\text{ext}})^2}{mR}v + g\sin\alpha.}$$

Sur cette équation on vérifie que le terme en g est > 0 et fait bien augmenter la vitesse, alors que le terme dû au phénomène d'induction est < 0 et freine la barre (conformément à la loi de Lenz).

5 - a - Le temps τ qui apparait dans l'équation ci-dessus est $\tau = \frac{mR}{(aB_{\text{ext}})^2}$.

On a alors une équation linéaire du premier ordre à coefficients constants, et le régime permanent est atteint au bout de quelque fois τ (penser à la charge d'un condensateur).

b - On se place en régime permanent, où les grandeurs ne varient plus. On a donc $\frac{dv}{dt} = 0$, et l'équation sur v indique que

$$0 = -\frac{(aB_{\text{ext}})^2}{mR}v + g \sin \alpha, \quad \text{soit} \quad v = \frac{mRg \sin \alpha}{(aB_{\text{ext}})^2}.$$

On peut vérifier plusieurs choses sur cette dernière égalité : si $\alpha = 0$ (pas d'inclinaison), alors $v = 0$; plus B_{ext} est élevé plus cette vitesse finale est faible (le champ B freine la barre); plus g est grand plus la vitesse finale est grande, etc.

Enfin, le courant est

$$i = -\frac{B_{\text{ext}}av}{R} = -\frac{mg \sin \alpha}{aB_{\text{ext}}}.$$

c - ★ Puissance mécanique reçue par la tige mobile suite à la force de pesanteur :

$$\mathcal{P}_{\text{méca reçue par tige}} = m\vec{g} \cdot \vec{v} = m\vec{g} \cdot v\vec{e}_x = mgv \sin \alpha = mg \left(\frac{mRg \sin \alpha}{(aB_{\text{ext}})^2} \right) \sin \alpha.$$

★ Puissance électrique reçue par la résistance R :

$$\mathcal{P}_{\text{élec reçue par R}} = Ri^2 = R \left(\frac{mg \sin \alpha}{aB_{\text{ext}}} \right)^2$$

★ Conclusion : en simplifiant les deux expressions ci-dessus, on voit qu'on a l'égalité

$$\mathcal{P}_{\text{méca reçue par tige}} = \mathcal{P}_{\text{élec reçue par R}}.$$

On voit donc que toute la puissance fournie mécaniquement au système (ici la puissance fournie par la force de pesanteur) est transformée en puissance électrique (ici reçue par la résistance). On a donc transformé de l'énergie mécanique en énergie électrique, et avec une efficacité de 100% dans ce modèle (qui néglige des pertes, par frottements par exemple).

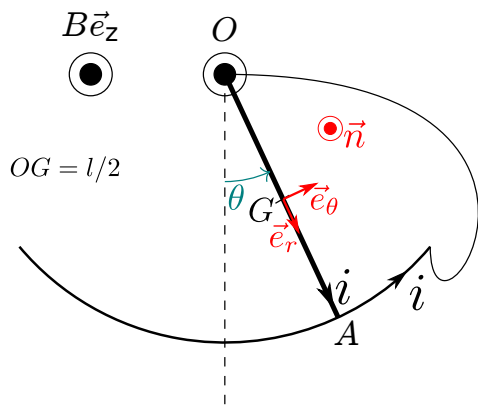
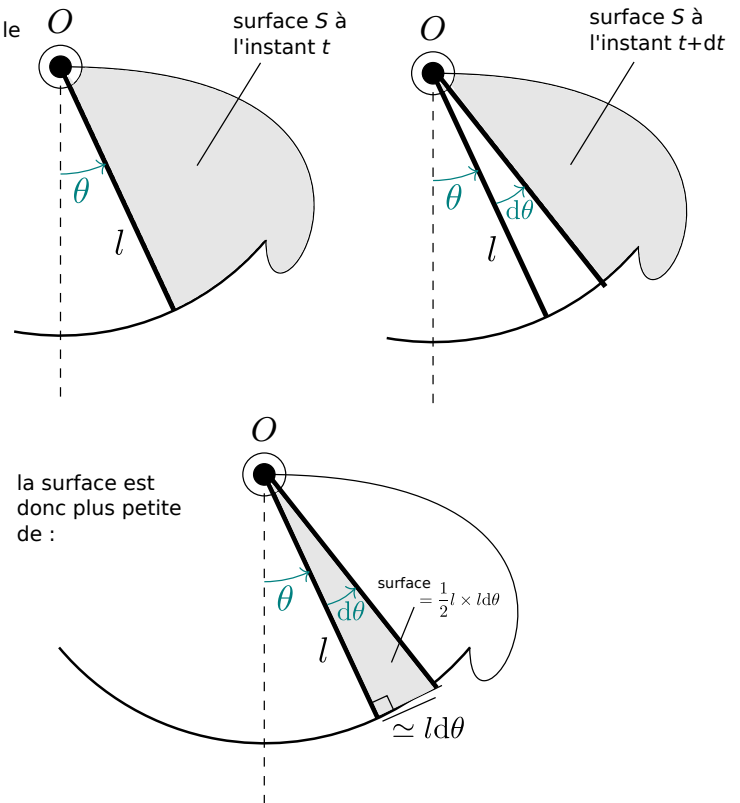


schéma pour le calcul du changement de surface



1 - * Commençons par l'équation électrique.

– Orientation du circuit : cf schéma ci-dessus.

– Calcul du flux : $\Phi = \vec{B} \cdot S\vec{n} = BS$.

On ne connaît pas la surface totale, mais elle dépend du temps.

On a $\frac{d\Phi}{dt} = B \frac{dS}{dt}$. Or on voit sur le schéma ci-dessus à droite que entre t et $t + dt$, la surface du circuit qui intercepte le champ \vec{B} décroît de l'aire grisée, donc on a :

$$S(t + dt) - S(t) = -\frac{1}{2}l \times ld\theta.$$

La dérivée de la surface par rapport au temps est donc :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{S(t + dt) - S(t)}{dt} = \frac{-\frac{1}{2}l \times ld\theta}{dt} = -\frac{1}{2}l^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

Et pour le flux :

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{2}Bl^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

Ceci permet d'avoir la fem induite dans le schéma électrique équivalent, en convention générateur :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2}Bl^2 \dot{\theta}.$$

– Schéma électrique équivalent : une fem et une résistance (on néglige l'inductance propre), donc la loi des mailles donne $e = Ri$, et donc le courant est :

$$i = \frac{Bl^2 \dot{\theta}}{2R}.$$

* Équation mécanique :

Il faut exprimer le moment des forces de Laplace. La force de Laplace sur la tige est :

$$\vec{F}_L = il\vec{e}_r \wedge B\vec{e}_z = -ilB\vec{e}_\theta.$$

Le couple par rapport à O est donc (car la résultante s'applique au milieu G) :

$$\vec{\Gamma}_O(\vec{F}_L) = \vec{OG} \wedge \vec{F}_L = \frac{l}{2}\vec{e}_r \wedge -ilB\vec{e}_\theta = -\frac{il^2B}{2}\vec{e}_z.$$

Et le couple selon l'axe Oz est donc

$$\Gamma_{Oz}(\vec{F}_L) = -\frac{il^2B}{2}.$$

Remarque : Si on trouve le calcul de e ci-dessus trop compliqué avec la surface $S(t)$, on peut aussi obtenir e en utilisant la relation $ei + \mathcal{P}_{\text{Laplace}} = 0$, qui donne $ei = -\Gamma_{Oz}(\vec{F}_L)\dot{\theta} = \frac{il^2B}{2}\dot{\theta}$, et on retrouve bien $e = \frac{l^2B\dot{\theta}}{2}$.

Poursuivons : on injecte l'expression de i dans $\Gamma_{L,Oz}$:

$$\Gamma_{Oz}(\vec{F}_L) = -\frac{l^4B^2\dot{\theta}}{4R}.$$

On remarque que ce moment s'oppose toujours à $\dot{\theta}$, donc est toujours opposé au mouvement. C'est en accord avec la loi de Lenz.

Il faut ensuite le moment en O du poids :

$$\vec{\Gamma}_O(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge m\vec{g} = \frac{l}{2}\vec{e}_r \wedge mg\vec{e}_x = -\frac{mgl}{2}\sin\theta\vec{e}_z,$$

et donc

$$\Gamma_{Oz}(\vec{P}) = -\frac{mgl}{2}\sin\theta.$$

On applique le théorème du moment cinétique à la tige, par rapport à l'axe Oz :

$$\frac{d(J\dot{\theta})}{dt} = \Gamma_{Oz}(\vec{P}) + \Gamma_{Oz}(\vec{F}_L) + \Gamma_{Oz}(\text{liaison pivot}),$$

d'où

$$J\ddot{\theta} = -\frac{mgl}{2}\sin\theta - \frac{l^4B^2\dot{\theta}}{4R}, \quad \text{soit} \quad \ddot{\theta} + \frac{l^4B^2}{4JR}\dot{\theta} + \frac{mgl}{2J}\sin\theta = 0.$$

En utilisant $J = \frac{1}{3}ml^2$:

$$\ddot{\theta} + \frac{3l^2B^2}{4mR}\dot{\theta} + \frac{3g}{2l}\sin\theta = 0.$$

2 - Oscillations de petite amplitude : $\sin\theta \simeq \theta$, et on a

$$\ddot{\theta} + \frac{3l^2B^2}{4mR}\dot{\theta} + \frac{3g}{2l}\theta = 0.$$

Les oscillations sont amorties si et seulement si le discriminant de l'équation caractéristique est positif :

$$\Delta = \left(\frac{3l^2B^2}{4mR}\right)^2 - 4\frac{3g}{2l} \geq 0.$$

Après quelques manipulations, on obtient le critère

$$B \geq \left(\frac{32}{3}\frac{gm^2R^2}{l^5}\right)^{1/4}.$$

VIII Moteur homopolaire de Faraday [●●○]