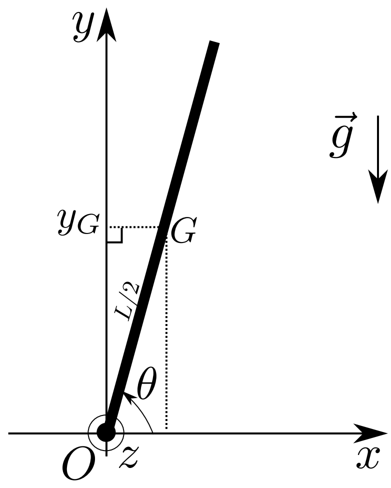
Mécanique
Chapitre 7

Correction – TD – Introduction à la mécanique du solide

I Chute d'un arbre [• • ○]



1 - Énergie cinétique : $E_c = \dfrac{1}{2}J\dot\theta^2$, d'où $\boxed{E_c = \dfrac{1}{6}mL^2\dot\theta^2.}$

Énergie potentielle de pesanteur : $E_p = mgy_G$ où y_G est l'altitude du centre de masse de l'arbre.

Or ici $\sin\theta = \dfrac{y_G}{L/2}$, d'où $\boxed{E_p = \dfrac{mgL}{2}\sin\theta.}$

2 - La liaison pivot est de puissance nulle car parfaite. Ainsi toute les actions mécaniques sont conservatives ou ne travaillent pas, donc l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$ est constante au cours du mouvement.

À l'instant initial elle vaut $\boxed{E_m = 0 + \dfrac{mgL}{2}\sin\theta_0.}$

3 - On a donc $\dfrac{1}{6}mL^2\dot\theta^2 + \dfrac{mgL}{2}\sin\theta = \dfrac{mgL}{2}\sin\theta_0$.

On en déduit facilement que

$$\dot\theta^2 = \frac{3g}{L}\left(\sin\theta_0 - \sin\theta\right), \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{3g}{L}}\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}.}$$

(On choisit la solution négative, car θ décroit, donc $\dot\theta < 0$.)

4 - On a donc $\mathrm{d}t = -\sqrt{\dfrac{L}{3g}}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}}$.

Et on obtient la durée totale :

$$\begin{aligned}
T &= \int_{t=0}^{t=T} \mathrm{d}t \\
&= \int_{\theta=\theta_0}^{\theta=\theta(T)=0} -\sqrt{\frac{L}{3g}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}} \\
&= -\sqrt{\frac{L}{3g}}\int_{\theta_0}^{0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}} \\
&= \sqrt{\frac{L}{3g}}\int_{0}^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}} \\
&= 4{,}315\sqrt{\frac{L}{3g}} \\
&= 2{,}5\,\mathrm{s}.
\end{aligned}$$

II Gravimètre à ressort spirale [● ○ ○]

1 - ⋆ Référentiel terrestre galiléen. Coordonnées polaires.

Pour appliquer le TMC, il faut exprimer le moment cinétique du solide {masse+tige} et les moments des actions mécaniques.

⋆ $\sigma_{Ox} = J_{Ox}\dot\theta = mL^2\dot\theta$.

⋆ Bilan des actions mécaniques sur le système {masse+tige} :

- Poids $\vec P = m\vec g$.
- Action de la liaison pivot.
- Action du ressort spirale.

Moments :

- Le point d'application du poids est G, donc son moment est

$$\begin{aligned}\vec\Gamma_O(\vec P) &= \overrightarrow{OM}\wedge\vec P\\ &= L\vec e_r\wedge mg(-\cos\theta\,\vec e_r+\sin\theta\,\vec e_\theta)\\ &= -mgL\cos\theta\,\underbrace{\vec e_r\wedge\vec e_r}_{=\vec 0}+mgL\sin\theta\,\underbrace{\vec e_r\wedge\vec e_\theta}_{=\vec e_x}\\ &= mgL\sin\theta\vec e_x.\end{aligned}$$

  Et donc $\Gamma_{Ox}(\vec P) = mgL\sin\theta$.
  On peut utiliser d'autres méthode : avec la formule pour la norme, ou avec le bras de levier.
- Le moment résultant de la liaison pivot est nul car elle est modélisée comme parfaite.
- Le moment résultant du ressort est donné par $\mathcal{M}_x = -C\theta$.

⋆ Théorème du moment cinétique au solide {masse+tige}, par rapport à l'axe Ox fixe :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{Ox}}{\mathrm{d}t} = \Gamma_{Ox}(\vec P)+\mathcal{M}_x \quad\Rightarrow\quad mL^2\ddot\theta = mgL\sin\theta - C\theta,$$

d'où en simplifiant : $\boxed{\ddot\theta - \frac{g}{L}\sin\theta = -\frac{C}{mL^2}\,\theta.}$

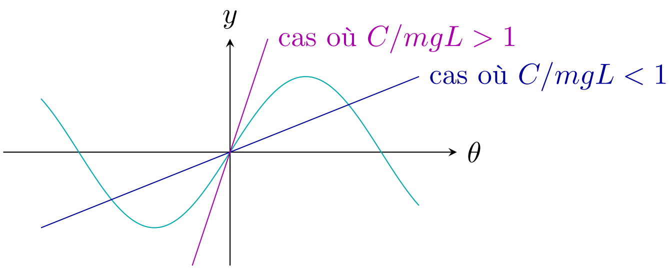
2 - a - À l'équilibre plus rien ne bouge, donc $\ddot\theta = 0$. On a donc $-\frac{g}{L}\sin\theta = -\frac{C}{mL^2}\,\theta$, soit

$$\boxed{\sin\theta_{\text{éq}} = \frac{C}{mgL}\theta_{\text{éq}}.}$$

b - Il faut résoudre graphiquement cette équation, en traçant :

- d'une part la courbe $y=\sin\theta$,
- d'autre part la courbe $y = \frac{C}{mgL}\,\theta$,

et les solutions sont à l'intersection des deux.



On voit donc que si $C/mgL > 1$ il n'y a qu'une seule solution ($\theta_{\text{éq}} = 0$) ; et que si $C/mgL < 1$, il y a trois solutions ($\theta_{\text{éq}} = 0$ et deux autres symétriques).

3 - a - Il y a trois actions mécaniques : la liaison pivot (puissance nulle, donc E_p également), celle du ressort où E_p est donnée dans l'énoncé, et celle de la pesanteur.

Cette dernière s'écrit $E_{p,\text{pes}} = Mgz_G$ où G est le centre d'inertie du système. Ici $G = M$ car on néglige la masse de la tige.

On a donc $z_G = L\cos\theta$.

Conclusion :

$$\boxed{E_p = MgL\cos\theta + \frac{1}{2}C\theta^2.}$$

b - On a un mouvement à un degré de liberté (θ), donc on sait que les positions d'équilibre sont sur les minimum ou maximum de $E_p(\theta)$, donc là où $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta} = 0$.

Et que ces positions sont stables si $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2} > 0$ et instables sinon.

Calculons : $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta} = -MgL\sin\theta + C\theta$.

(On retrouve bien des positions d'équilibre qui vérifient la relation $\sin\theta = C\theta/(MgL)$.)

$\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2} = -MgL\cos\theta + C$, donc $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta = 0) = -MgL + C$.

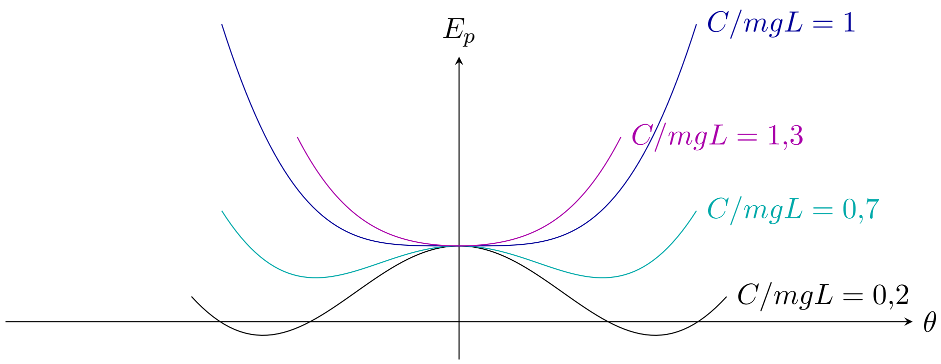
Ainsi la position d'équilibre en $\theta = 0$ est stable si $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta = 0) > 0$, donc si $\boxed{C > MgL.}$

Remarque : Il est intuitif que si C est grand, le ressort à une raideur importante et tend à maintenir la masse au centre, ce qui fait de la position en 0 une position stable.

En revanche si sa raideur est très faible, il ne maintient pas la masse et la tige tend à s'écarter naturellement de $\theta = 0$.

4 - Nous avons montré que les positions d'équilibre en $\theta \neq 0$ n'existent que si $C/mgL < 1$, donc si la raideur est assez faible. Mais si la raideur est faible on imagine que le poids de M a l'avantage et que la position est stable.

C'est bien ce que montrerait un calcul de $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}$, et c'est bien ce que montrent les graphiques de $E_p(\theta)$ ci-dessous.



5 - Mouvement de faible amplitude, donc $\sin\theta \simeq \theta$. Ainsi l'équation du mouvement de la question 1 devient :

$$\ddot\theta - \frac{g}{L}\theta = -\frac{C}{mL^2}\theta = 0, \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot\theta + \underbrace{\left(\frac{C}{mL^2} - \frac{g}{L}\right)}_{\omega_0^2}\theta = 0.}$$

La période des oscillations est donc $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\left(\dfrac{C}{mL^2} - \dfrac{g}{L}\right)^{-1/2} = 2\pi\left(\dfrac{1}{L}\left[\dfrac{C}{mL} - g\right]\right)^{-1/2}$, d'où

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{L}(g_0 - g)^{-1/2}.}$$

Ainsi la mesure de cette période permet d'en déduire la différence $g_0 - g$. Or $g_0 = C/mL$ peut être choisi librement (il dépend des caractéristique du pendule), par exemple proche de g mais légèrement supérieur, et le pendule permet alors de mesurer précisément l'écart entre les deux, donc au final d'obtenir g.

III Tabouret d'inertie [● ○ ○]

1 - TMC à ce système : $\dfrac{\mathrm{d}\sigma_z}{\mathrm{d}t} = \Gamma_z(\text{poids}) + \Gamma_z(\text{liaison pivot}) = 0 + 0$, donc $\sigma_z = \text{cst}$.

Remarque : les moments des actions internes au système (l'action des bras par exemple) se compensent et n'apparaissent jamais dans le TMC. Seules les actions externes sont à prendre en compte.

2 - Initialement, $\sigma_z = J_1\omega_1$. Dans l'état finale, $\sigma_z = J_2\omega_2$. Donc on a $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$.

Or $J_2 < J_1$ (rapprocher les bras diminue le moment d'inertie), donc $\omega_2 > \omega_1$.

3 - $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$, d'où $\omega_2 = \omega_1 \dfrac{J_1}{J_2} = 3{,}0\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

4 - $E_{c1} = \dfrac{1}{2}J_1\omega_1^2$ et $E_{c2} = \dfrac{1}{2}J_2\omega_2^2$. Donc

$$\begin{aligned}\Delta E_c &= \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}J_1\omega_1^2\\ &= \frac{1}{2}J_1\omega_1\omega_2 - \frac{1}{2}J_1\omega_1^2\\ &= \frac{1}{2}J_1\omega_1(\omega_2 - \omega_1) > 0.\end{aligned}$$

On peut calculer : $\Delta E_c = 15\,\mathrm{J}$.

Cette augmentation d'énergie cinétique provient de la puissance non nulle des actions internes au système (ramener les bras le long du corps nécessite un effort).

5 - Théorème de l'énergie cinétique au système {tabouret+personne+poids} :

$$\Delta E_c = \underbrace{W(\text{poids}) + W(\text{liaison pivot})}_{\text{actions externes}} + \underbrace{W(\text{bras})}_{\text{actions internes}}.$$

Or tout reste à la même altitude, donc $W(\text{poids}) = 0$, et la liaison pivot est parfaite, donc $W(\text{liaison pivot} = 0$.

On a donc $W(\text{bras} = \Delta E_c = 15\,\mathrm{J}$.

IV Rotation d'une étoile à neutrons [$\bullet\circ\circ$]

1 - Soit Oz l'axe de rotation et ω la vitesse angulaire de rotation.

Le point clé est que comme le système est isolé, son moment cinétique se conserve :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \Gamma_{Oz,i} = 0, \quad \text{donc} \quad \sigma_{Oz} = \text{cst} \quad \text{donc} \quad \boxed{J\omega = \text{cst.}}$$

Ainsi si J diminue (parce que le noyau de l'étoile se contracte), alors ω doit augmenter !

Ici avant effondrement : $J_1 = \dfrac{2}{5} m R_1^2$ et $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T_1}$ avec $R_1 = 100\,000\,\text{km}$ et $T_1 = 30\,\text{jours}$.

Après effondrement $J_2 = \dfrac{2}{5} m R_2^2$ et $\omega_2 = \dfrac{2\pi}{T_2}$ avec $R_2 = 10\,\text{km}$ et T_2 inconnu.

La masse m est la même avant et après, car il n'y a pas de perte de matière pour le noyau.

Comme $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$, on en déduit que $\dfrac{R_1^2}{T_1} = \dfrac{R_2^2}{T_2}$, d'où

$$\boxed{T_2 = T_1 \times \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = 26\,\text{ms.}}$$

2 - L'expérience est à tenter. Le principe est le même : si on néglige les frottements de la liaison pivot qui ralentissent la rotation, on a $J\omega = \text{cst}$. Or ramener les bras vers le corps diminue J, donc augmente ω.

Remarque : Le système considéré ici n'est pas un solide, puisqu'il se déforme au cours de son évolution. Il y a donc des forces internes au système, qui peuvent fournir une certaine puissance ou un travail. En particulier l'énergie cinétique du système, $E_c = J\omega^2/2$, augmente entre le début et la fin : cette augmentation provient justement du travail des forces internes du système.

$$\Delta E_c = W(\vec{F}_{\text{interne}}).$$

Sur votre chaise tournante, vous gagnez de l'énergie cinétique de rotation parce que vous fournissez un effort pour ramener les bras vers vous.

Quant au théorème du moment cinétique que nous avons utilisé, les moments des forces internes s'annulent toujours à cause du principe des actions réciproques. Il prend donc toujours la même forme, que le système soit un solide ou soit déformable :

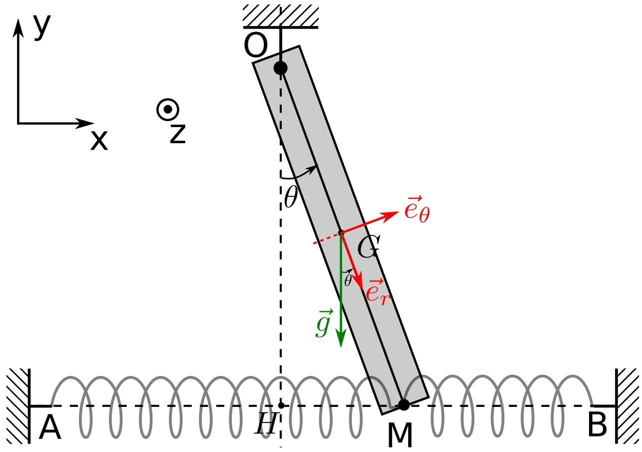
$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\sum_i \Gamma_{Oz}(\vec{F}_{\text{ext}})}_{\text{nul ici}} + \underbrace{\sum_j \Gamma_{Oz}(\vec{F}_{\text{int}})}_{\text{s'annule toujours}}.$$

V Pendule relié à deux ressorts [●●○]

On raisonne sur le schéma ci-contre.

On définit θ comme l'angle entre la verticale descendante et la tige, et on vérifie qu'il est bien défini dans le sens direct (sur le schéma il va de Ox vers Oy).

H est le milieu de AB. D'après l'énoncé $l_0 = AH = HB$.



1 - Le moment cinétique de la barre, par rapport à l'axe Oz, est $\sigma_{Oz} = J_{Oz}\dot{\theta} = \dfrac{1}{3}mL^2\dot{\theta}$.

Le théorème du moment cinétique s'écrit, dans un référentiel terrestre supposé galiléen, au système {barre de masse m} :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta} = \sum_i \Gamma_{Oz}(\vec{F}_i).}$$

2 - Actions mécaniques s'exerçant sur la tige :

- Pesanteur : $\vec{F} = m\vec{g}$, et moment en O :

$$\vec{\Gamma}_O = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} = \frac{L}{2}\vec{e}_r \wedge mg(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta) = -\frac{Lmg}{2}\sin\theta\,\vec{e}_z.$$

- Force de rappel du ressort de gauche :

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}_x = -k(L\sin\theta)\vec{e}_x$$

et moment en O :

$$\vec{\Gamma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = L\vec{e}_r \wedge (-k)L\sin\theta(\cos\theta\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\vec{e}_r) = -kL^2\sin\theta\cos\theta\,\vec{e}_z.$$

- Force de rappel du ressort de droite :

$$\vec{F} = +k(l - l_0)\vec{e}_x = +k(-L\sin\theta)\vec{e}_x = -kL\sin\theta\vec{e}_x$$

et moment en O :

$$\vec{\Gamma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = L\vec{e}_r \wedge (-kL\sin\theta)(\cos\theta\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\vec{e}_r) = -kL^2\sin\theta\cos\theta\,\vec{e}_z.$$

On applique le théorème du moment cinétique, en projetant tous les moments sur l'axe Oz, et en utilisant $\sin\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta \simeq 1$:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta} = -\frac{Lmg}{2}\theta - 2kL^2\theta, \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot{\theta} + 3\left(\frac{g}{2L} + \frac{2k}{m}\right)\theta = 0.}$$

La pulsation des oscillations est $\boxed{\omega_0 = \sqrt{3\left(\dfrac{g}{2L} + \dfrac{2k}{m}\right)}.}$