Mécanique
Chapitre 6

TD – Mouvement dans un champ de force centrale

Remarque : exercice avec $\star$: exercice particulièrement important, à maîtriser en priorité (de même que les exemples de questions de cours des "ce qu'il faut savoir faire")| [$\bullet \circ \circ$] : difficulté des exercices

Données pour tous les exercices : Terre (rayon $R_T = 6400\,\mathrm{km}$, masse $M_T = 6{,}0\times 10^{24}\,\mathrm{kg}$) ; constante de gravitation $G = 6{,}67\times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$, Soleil (masse $M_S = 2{,}0\times 10^{30}\,\mathrm{kg}$) ; une unité astronomique (ua) correspond à la distance moyenne Terre-Soleil, soit 150 millions de km, ou $1{,}5\times 10^{11}\,\mathrm{m}$.

On donne aussi la troisième loi de Kepler : $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_S} = \text{cst}$.

I Questions courtes $\star$ | [$\bullet \circ \circ$]

1 - Dans le référentiel terrestre, quelle est la période de rotation de la Terre sur elle-même ? Et dans le référentiel géocentrique ? Et héliocentrique ?

2 - Pour lancer un satellite, il faut lui fournir une vitesse initiale assez élevée dans le référentiel géocentrique.

Justifier alors pourquoi les bases de lancement sont situées proches de l'équateur. Quelle est la vitesse "gratuitement fournie" par la rotation terrestre à cet endroit ?

II Vitesse de libération [$\bullet \circ \circ$]

On se place à la surface de la Terre, dans le référentiel géocentrique, et on lance des satellites de masse m avec des vitesses initiales v_0 de plus en plus élevées.

- Pour $v_0 < 8\,\mathrm{km/s}$, le satellite retombe par terre. (8 km/s est la vitesse en orbite basse)
- Pour $v_0 > 8\,\mathrm{km/s}$, le satellite décrit une orbite périodique (ellipse).
- Pour v_0 encore plus grand, on s'attend à ce que le satellite s'éloigne sans cesse de la Terre sans jamais revenir (donc que son mouvement soit un état de diffusion).

  Soit v_l la vitesse à partir de laquelle ceci se produit. On l'appelle **vitesse de libération**, ou seconde vitesse cosmique.

Cet exercice propose de déterminer cette vitesse.
Dit autrement, on lance un satellite de masse m depuis la surface terrestre, avec une vitesse initiale v_0. On souhaite que ce satellite s'éloigne indéfiniment de la Terre (par exemple pour atteindre Mars...). On cherche la vitesse minimale à lui communiquer.

1 - Écrire l'expression générale de l'énergie mécanique, en fonction de r.

On note $E_{c,\infty}$ l'énergie cinétique lorsque le satellite est très éloigné de la Terre ($r \to +\infty$).

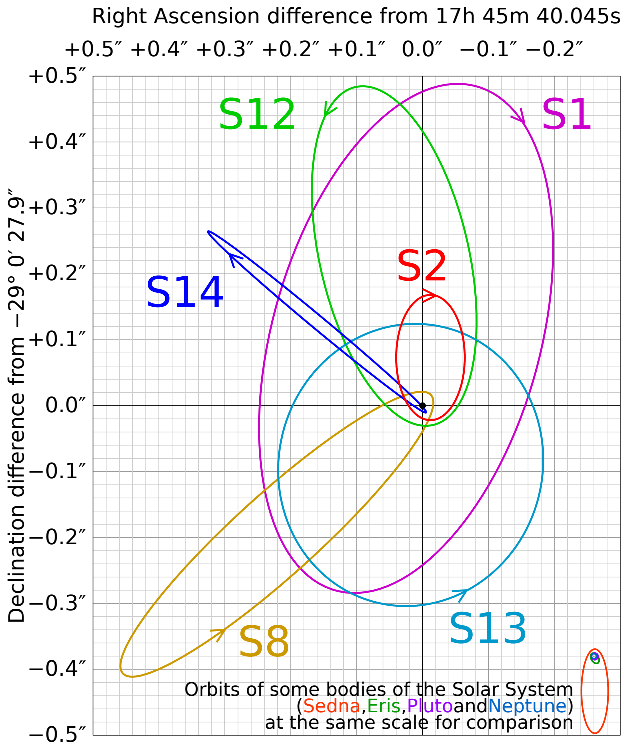
Donner l'expression de $E_{c,\infty}$ en fonction de v_0, R_T et d'autres constantes.

2 - En déduire la valeur minimale de v_0 a communiquer lors du lancé du satellite.

III Trou noir supermassif [● ○ ○]

Nous savons aujourd'hui que presque toutes les galaxies ont en leur centre un trou noir supermassif. C'est le cas de la voie lactée (qui est notre galaxie). Ce trou noir n'a pas été observé directement (pas encore mais bientôt, car il existe une méthode utilisant des radiotéléscopes placés à différents endroits sur Terre, qui a déjà réussi à imager le trou noir supermassif d'une galaxie voisine, cf `http://mmelzani.fr/index.php?page=2`).

Nous avons une preuve indirecte de son existence : le suivi de la trajectoire d'étoiles proches du centre de la galaxie montre qu'elles orbitent autour d'un centre très massif (cf image ci-contre, et animation sur le site de classe).



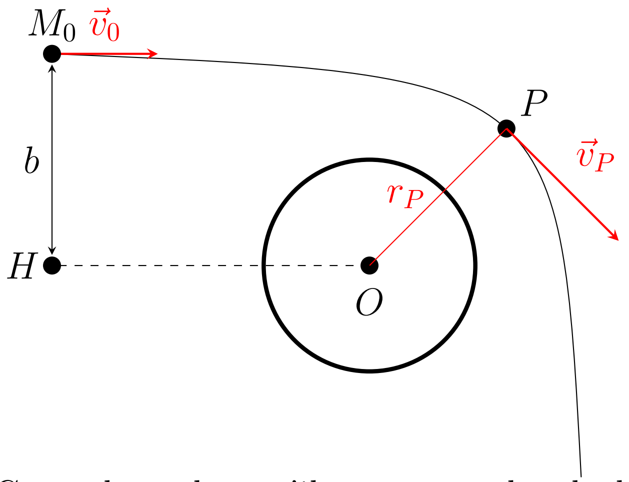
Les observations permettent de connaître les périodes et demi-grand axes de chacune. Par exemple pour l'étoile S1 : $T = (94 \pm 9)$ années et $a = (3300 \pm 190)$ ua.

1 - Estimer la masse du trou noir central.

Remarque : Certaines de ces étoiles passent assez près du trou noir, et assez rapidement. Par exemple S2 atteint 3% de la vitesse de la lumière au périhélie, et un suivi précis de sa trajectoire sur plus de 30 ans à montré, en 2020, que son orbite s'écarte d'une orbite prédite par la théorie de Newton (notamment le grand axe de l'ellipse tourne avec le temps). Cette orbite est compatible avec les prédictions de la relativité générale.

IV Astéroïde géocroiseur [● ● ○]

Les astéroïdes dont l'orbite s'approche de celle de la Terre sont nommés géocroiseurs. Lorsqu'ils sont trop proches, ils s'échauffent par frottement dans les hautes couches de l'atmosphère et se désintègrent en donnant naissance à des étoiles filantes. S'ils sont plus proches encore, ils peuvent donner lieu à un impact avec la Terre.



On considère ici un astéroïde de masse m, initialement très éloigné de la Terre (masse M_T) et de tout autre astre, si bien qu'il est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{v}_0$.

Le prolongement de sa trajectoire rectiligne passe à une distance b du centre O de la Terre, appelée paramètre d'impact.

Cependant, lorsqu'il se rapproche de la Terre, l'attraction gravitationnelle dévie l'astéroïde et sa trajectoire devient hyperbolique. On appelle périgée le point P de cette trajectoire la plus proche du centre de la Terre à distance r_P. L'astéroïde a alors une vitesse v_P. La figure ci-dessus n'est pas à l'échelle.

L'objectif de l'exercice est de déterminer l'expression de la distance d'approche r_P en fonction de paramètres connus de l'orbite lointaine (b et v_0).

1 - Justifier que l'énergie mécanique de l'astéroïde est une constante du mouvement. Traduire cette conservation entre la situation initiale et le point P, en établissant une relation entre r_P, v_P et v_0.

2 - Montrer que le moment cinétique de l'astéroïde par rapport à O est également une constante du mouvement. Traduire cette conservation entre la situation initiale et le point P en établissant une seconde relation entre r_P, v_P, b et v_0..

3 - En déduire l'expression de la distance minimale d'approche r_P en fonction de b et v_0.

4 - Le système de surveillance de la NASA vient de détecter un astéroïde de vitesse estimée à $v_0 = 2{,}0\,\text{km/s}$ et de paramètre d'impact $b = 1{,}0 \times 10^5\,\text{km}$. Doit-on s'attendre à une collision ? À des étoiles filantes ?

La hauteur de l'atmosphère est d'environ 10 à 100 km.

V Comète de Halley ★ | [● ○ ○]

Les comètes sont des corps principalement constitués de glace et de poussière, dont l'orbite autour du Soleil est très excentrée. Elles proviennent des confins du système solaire (ceinture de Kuiper et nuage d'Oort). Celle de Halley est peut-être la plus connue. La première mention de son observation date de 611 av. J.-C. en Chine, et on la retrouve tout au long de l'Antiquité et du Moyen Âge... évidemment sans savoir qu'il s'agit du même corps qui revient !

C'est Edmond Halley qui, en 1705, étudie les dates de passages de comètes dans l'histoire passée, et remarque une périodicité dans certaines séries (par exemple 1531, 1607 et 1682) : il fait l'hypothèse qu'il s'agit en fait la même comète, et il prédit la date de son retour. Son dernier passage date de 1986, et le prochain est prévu en 2061. On a pu mesurer sa distance minimale d'approche au Soleil : $d_{\text{min}} = 0{,}59$ unités astronomiques.

1 - Faire un schéma de la trajectoire indiquant la position du Soleil et d_{min}.

2 - Déduire de la troisième loi de Kepler la plus grande distance au Soleil de la comète.

3 - Une ellipse est l'ensemble des points M dont les coordonnées polaires suivent la relation $r(\theta) = \dfrac{p}{1 - e\cos\theta}$, où l'origine du repère polaire est prise sur le foyer F de l'ellipse (celui de gauche) où se situe le corps central, $r = FM$, et θ est l'angle entre le grand axe et la ligne FM. p et e sont des constantes qui caractérisent l'ellipse.

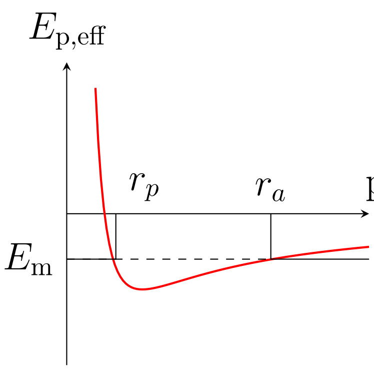
Déterminer l'excentricité e de la trajectoire de la comète de Halley.

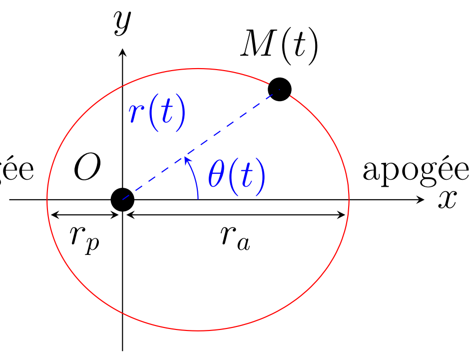
VI E_m pour une trajectoire elliptique [● ● ○]

On considère une masse m fixe à l'origine O du repère, et une masse m' située en M qui orbite autour.

Nous avons vu en exercice de cours que pour une trajectoire circulaire de rayon R l'énergie mécanique de la masse m' s'écrit $E_m = -\dfrac{Gmm'}{2R}$. L'objectif de cet exercice est d'établir cette expression dans le cas plus général d'une trajectoire elliptique.

On note a le demi-grand axe de l'ellipse. On utilise les coordonnées polaires (r,θ) dans le plan de l'orbite, avec pour centre O le foyer de l'ellipse autour duquel orbite m'.





1 - Rappeler l'expression de l'énergie mécanique de la masse m', notamment en fonction de m, m', $\dot{\theta}$, $\dot{r}$, r et G.

2 - On note $C = r^2\dot\theta$ la constante des aires. Le théorème du moment cinétique permet de montrer qu'elle est constante. Introduire C dans l'expression précédente de E_m, et écrire E_m sous la forme $E_m = \dfrac{1}{2}m'\dot r^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$. On donnera l'expression de $E_{p,\text{eff}}(r)$, dans laquelle $\dot\theta$ n'intervient plus. Cette fonction est tracée ci-dessus.

3 - On se place aux points $r = r_a$ et $r = r_p$. En ces points, on a $E_m = E_{p,\text{eff}}(r)$ et $\dot r = 0$. Écrire l'équation $E_m = E_{p,\text{eff}}(r)$ sous la forme d'une équation du second degré sur r : $r^2 + \alpha r + \beta = 0$.

4 - r_p et r_a sont les racines de l'équation précédente.

Elle s'écrit donc aussi $(r - r_p)(r - r_a) = 0$. Prouver alors que $r_p + r_a = -\alpha$.

En déduire que l'expression de l'énergie mécanique pour la trajectoire elliptique est $E_m = -\dfrac{Gmm'}{2a}$ (indice : $r_p + r_a$ s'exprime simplement en fonction de a).

VII Freinage d'un satellite dans l'atmosphère [•• ∘]

On considère un satellite de masse m en orbite basse circulaire de rayon r autour de la Terre de masse M_T. Comme le satellite est en orbite basse, il se trouve dans les couches supérieures de l'atmosphère et subit une force de frottement. On suppose ces frottements suffisamment faibles pour que l'orbite reste quasi-circulaire sur un tour.

1 - Retrouver l'expression de la vitesse v du satellite dans le référentiel géocentrique en fonction de G, M_T, r et d'un vecteur, puis celle de son énergie mécanique E_m (en fonction de G, M_T, r et m). (Donc dans cette question on néglige les frottements.)

2 - Le travail des forces de frottements est-il moteur ou résistant ? En déduire le signe de $\dfrac{\mathrm{d}E_\text{m}}{\mathrm{d}t}$.

3 - Comment évolue le rayon de l'orbite du satellite au cours du temps ? Tracer l'allure de sa trajectoire dans le référentiel géocentrique.

4 - En déduire comment évolue sa vitesse. Est-ce que ceci était intuitif ?

5 - On suppose que les forces de frottement sont de la forme $\vec f = -\alpha m v\,\vec v$ avec $\alpha > 0$ une constante estimée à $\alpha = 1{,}5 \times 10^{-15}\,\text{m}^{-1}$.

a - On raisonne sur une orbite (un seul tour) du satellite, que l'on peut supposer circulaire uniforme.

Appliquer le théorème de l'énergie mécanique sur cette orbite, et en déduire la variation d'énergie mécanique ΔE_m pour un tour, en fonction de α, G, m, M_T.

b - (question plus difficile) Utiliser ensuite l'expression de E_m obtenue à la question 1 pour en déduire la variation Δr de r sur une orbite (ce qui est donc la perte d'altitude du satellite), en fonction de r et α seulement.

On utilisera un développement limité :

$$\frac{1}{r-\Delta r} = \frac{1}{r} \times \frac{1}{1-\Delta r/r} \underbrace{\simeq}_{\Delta r/r \ll 1} \frac{1}{r}(1+\Delta r/r).$$

Faire l'A.N. pour une altitude de 200 km.

c - Combien de jours faut-il pour perdre une altitude de 10 km ?

VIII Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène [$\bullet \circ \circ$]

L'expérience de Rutherford a prouvé qu'un atome avait une structure lacunaire, composée essentiellement de vide. Ernest Rutherford propose donc vers 1910 un modèle planétaire de l'atome d'hydrogène, où l'électron (masse m, charge $-e$) est en orbite circulaire de rayon r autour d'un proton P (charge $+e$) que l'on supposera fixe dans le référentiel d'étude.

Données : constante de Planck $h = 6.6 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$; vitesse de la lumière dans le vide $c = 3.0 \times 10^{8}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$; permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$; charge élémentaire $e = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$; masse de l'électron $m = 9.1 \times 10^{-30}\,\mathrm{kg}$; $1.0\,\mathrm{eV} = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

1 - Exprimer la force exercée par le proton sur l'électron. En déduire l'énergie potentielle à laquelle est soumis l'électron.

2 - Déterminer la relation entre la vitesse v de l'électron et le rayon r de l'orbite, puis exprimer l'énergie mécanique de l'électron en fonction du rayon r de l'orbite.

Pour rendre compte du spectre de raies discret de l'atome d'hydrogène et de sa stabilité, Niels Bohr postule que l'électron ne peut occuper que certaines orbites stables de rayons r_n tel que la valeur absolue du moment cinétique de l'électron par rapport au point P, projeté sur l'axe perpendiculaire au plan de l'orbite, vérifie une condition de quantification

$$L_P(n) = n \times \hbar$$

où n est un entier naturel non nul appelé nombre quantique principal et $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ est la constante de Planck réduite.

3 - Exprimer le moment cinétique $L_P(n)$ de l'électron en fonction de r_n seulement.

4 - En déduire en fonction de n les rayons r_n des orbites permises pour l'électron.

5 - Montrer alors que l'énergie mécanique de l'électron peut s'écrire sous la forme $E_n = -\dfrac{E_0}{n^2}$. Calculer numériquement E_0 (en électron-volt).

On retrouve donc la formule de quantification des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène. Notons que si ce modèle planétaire permet d'expliquer la répartition des niveaux d'énergie, il n'est cependant pas satisfaisant car l'électron en orbite devrait rayonner des ondes électromagnétiques, perdre de l'énergie et s'écraser rapidement sur le noyau. La description des électrons dans les atomes nécessite en fait la mécanique quantique.