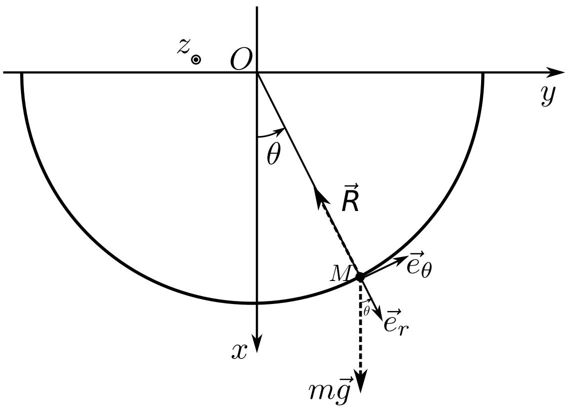
Partie VI : Mécanique
Chapitre 5

Correction – TD – Théorème du moment cinétique

I Snowbord dans un half-pipe [• ○ ○]



1 - ⋆ Référentiel terrestre galiléen. Coordonnées polaires.

Pour appliquer le TMC, il faut exprimer le moment cinétique et les moments des forces.

⋆ $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ avec $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$ et $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = R\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ (car R est constant).

D'où $\vec{\sigma}_O = R\vec{e}_r \wedge mR\dot{\theta}\vec{e}_\theta = mR^2\dot{\theta}\vec{e}_z$.

⋆ Bilan des forces sur le système {snowboarder} (faire un schéma pour les projections) :

– Poids $\vec{P} = mg\cos\theta\,\vec{e}_r - mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta$.
– Réaction $\vec{N} = N\vec{e}_r$ avec $N < 0$ (et pas de composante selon $\vec{e}_\theta$ car pas de frottements)

Moments :

– $\vec{\Gamma}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{P} = R\vec{e}_r\wedge mg(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta) = mgR\cos\theta\,\underbrace{\vec{e}_r\wedge\vec{e}_r}_{=\vec{0}} - mgR\sin\theta\,\underbrace{\vec{e}_r\wedge\vec{e}_\theta}_{=\vec{e}_z} = -mgR\sin\theta\vec{e}_z$.

  On peut utiliser d'autres méthode : avec la formule pour la norme, ou avec le bras de levier.
– $\vec{\Gamma}_O(\vec{N}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{N} = \vec{0}$ car $\overrightarrow{OM}//\vec{N}$.

⋆ Théorème du moment cinétique au point M, par rapport au point O fixe, dans le référentiel galiléen de la piste :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{\Gamma}_O(\vec{P}) + \vec{\Gamma}_O(\vec{N}) \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}(mR^2\dot{\theta}\vec{e}_z)}{\mathrm{d}t} = -mgR\sin\theta\vec{e}_z \quad\Rightarrow\quad mR^2\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z = -mgR\sin\theta\vec{e}_z.$$

On a donc, en simplifiant : $\boxed{\ddot{\theta} + \dfrac{g}{R}\sin\theta = 0.}$

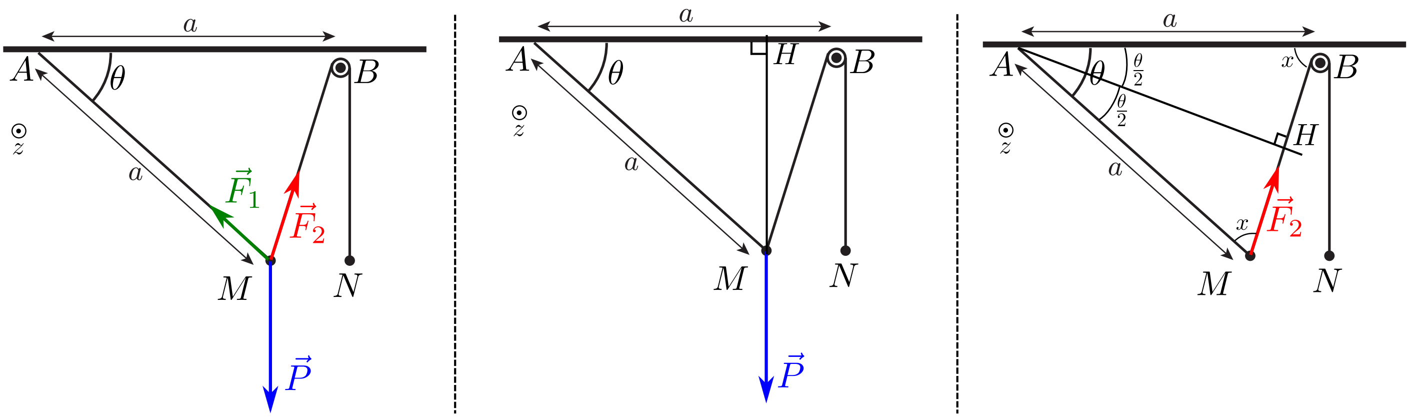
2 - On ne peut pas résoudre simplement cette équation, car elle est non linéaire (terme en $\sin\theta$).

Pour le faire, il faut supposer les petites oscillations (ici snowboarder proche du bas du demi-cylindre), car alors $\sin\theta \simeq \theta$ et on a l'équation de l'oscillateur harmonique : $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{R}\theta = 0$, dont les solutions sont de la forme

$$\theta(t) = \theta_{\text{hom}}(t) + \underbrace{\theta_{\text{part}}}_{=0\text{ ici}} = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$, et A et B constantes d'intégrations.

II Position d'équilibre statique [• • ∘]



1 - Trois forces s'exercent sur la masse m : le poids, la tension de la portion AM de la ficelle, et la tension de la portion MB de la ficelle (cf schéma ci-dessus à gauche).

⋆ Moment de la tension de la portion AM, par rapport à l'axe Az : il est nul, car cette force est colinéaire à $\overrightarrow{AM}$. Donc $\boxed{\Gamma_{Az}(\vec{F}_1) = 0.}$

⋆ Moment du poids, par rapport à l'axe Az : cf schéma au milieu. On utilise la méthode du bras de levier : $\Gamma_{Az}(\vec{P}) = -mgAH$, avec un signe moins car $\vec{P}$ tend à faire tourner M dans le sens indirect autour de l'axe (règle du tir bouchon).

Estimons AH : on a $\cos\theta = \dfrac{AH}{a}$, donc $AH = a\cos\theta$, et donc $\boxed{\Gamma_{Az}(\vec{P}) = -mga\cos\theta.}$

⋆ Moment de la tension de la portion MB, par rapport à l'axe Az : cf schéma de droite. On utilise la méthode du bras de levier : $\Gamma_{Az}(\vec{F}_2) = +m'gAH$, avec un signe plus car $\vec{F}_2$ tend à faire tourner M dans le sens direct autour de l'axe.

Estimons AH. Le triangle AMB est isocèle, donc la hauteur AH est aussi la bissectrice de l'angle en A (cf schéma à droite).

On a donc $\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{AH}{a}$, d'où $AH = a\cos\dfrac{\theta}{2}$.

Bilan : $\boxed{\Gamma_{Az}(\vec{F}_2) = m'ga\cos\dfrac{\theta}{2}.}$

2 - On applique le théorème du moment cinétique au point M, par rapport à l'axe Az : $\dfrac{\mathrm{d}\sigma_{Az}}{\mathrm{d}t} = \Gamma_{Az}(\vec{P}) + \Gamma_{Az}(\vec{F}_1) + \Gamma_{Az}(\vec{F}_2)$.

Or à l'équilibre rien ne bouge, donc la dérivée par rapport à t est nulle : la somme des moments est donc nulle.

Ceci impose donc que $mga\cos\dfrac{\theta}{2} - mga\cos\theta = 0$, donc que $\boxed{m'\cos\dfrac{\theta}{2} = m\cos\theta.}$

> **Remarque :** On peut aller plus loin et résoudre cette équation. On utilise $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$ et on obtient donc un trinome en $x = \cos\frac{\theta}{2}$, à savoir :
>
> $$m'\cos\frac{\theta}{2} = m(2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1) \quad\Leftrightarrow\quad m'x = 2mx^2 - m \quad\Leftrightarrow\quad 2mx^2 - m'x - m = 0.$$
>
> Discriminant $\Delta = m'^2 + 8m^2 > 0$ et solutions $x_\pm = \dfrac{m' \pm \sqrt{m'^2 + 8m^2}}{2m}$.
>
> Comme $x = \cos\frac{\theta}{2}$ et que $0 \leq \theta \leq \pi/2$, on a $0 \leq x \leq 1$, donc la solution avec un moins est exclue.

On a donc $\boxed{\cos\frac{\theta}{2} = x_+ = \frac{m' + \sqrt{m'^2 + 8m^2}}{4m}.}$

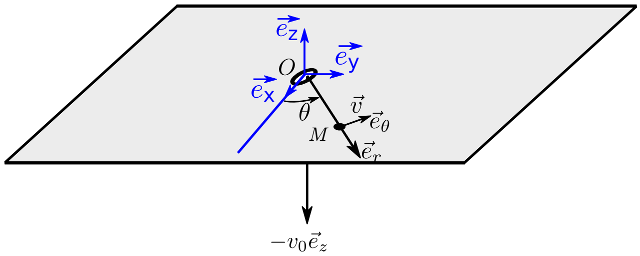
C'est possible si $x \leq 1$, donc si $m' + \sqrt{m'^2 + 8m^2} \leq 4m$, soit après calculs $\boxed{m' \leq m.}$

Pour $m' = m$ on trouve $\theta = 0$. Si $m' > m$, ce n'est pas que c'est impossible, mais M est confondu avec B et notre raisonnement ne s'applique plus (la portion MB n'existe plus...).

III Masse attachée à une ficelle [● ● ○]

1 -

On utilise des coordonnées cylindriques d'axe z.



⋆ $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ avec $r(t) = l_0 - v_0 t$ car on tire sur la ficelle à vitesse v_0 constante.

⋆ On dérive par rapport à t pour obtenir

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

⋆ Puis : $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = r\vec{e}_r \wedge m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr\dot{r}\underbrace{\vec{e}_r \wedge \vec{e}_r}_{=\vec{0}} + mr^2\dot{\theta}\underbrace{\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta}_{=\vec{e}_z}.$

$$\text{D'où } \boxed{\vec{\sigma}_O = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = m(l_0 - v_0 t)^2\dot{\theta}\vec{e}_z.}$$

2 - Bilan des forces sur la masse m :

– Le poids et la réaction du support, qui se compensent (pas de frottement). Donc leurs moments aussi :

$$\vec{\Gamma}_O(\vec{P}) + \vec{\Gamma}_O(\vec{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} = \overrightarrow{OM} \wedge \underbrace{(\vec{P} + \vec{R})}_{=\vec{0}} = \vec{0}.$$

– La force de tension de la ficelle, qui est colinéaire à la ficelle, donc à $\overrightarrow{OM}$, donc son moment est nul.

Ainsi le théorème du moment cinétique, par rapport au point O fixe, dans le référentiel galiléen du plan, s'écrit $\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{0}.}$

On a donc $\vec{\sigma}_O = \vec{\text{cst}}$, et donc $\boxed{m(l_0 - v_0 t)^2\dot{\theta} = \text{cst}.}$

3 - La vitesse angulaire est $\omega(t) = \dot{\theta}$. D'après ci-dessus, on a $(l_0 - v_0 t)^2\omega(t) = \text{cst} = l_0^2\omega_0$ (on évalue la constante en prenant $t = 0$).

D'où $\boxed{\omega(t) = \frac{l_0^2\omega_0}{(l_0 - v_0 t)^2}.}$

On constate que la vitesse angulaire augmente avec le temps.

4 -

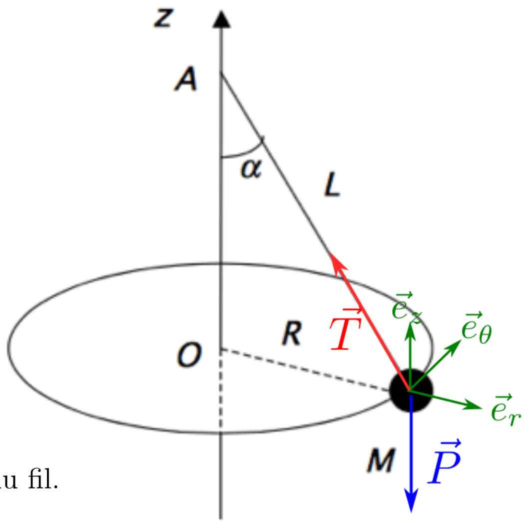
$$E_c = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) = \frac{1}{2}m\left(v_0^2 + (l_0 - v_0 t)^2\frac{(l_0^2\omega_0)^2}{(l_0 - v_0 t)^4}\right)$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}m\left(v_0^2 + \frac{l_0^4\omega_0^2}{(l_0 - v_0 t)^2}\right)}$$

On voit que cette énergie augmente avec le temps. Cette augmentation provient du travail de la force de tension de la ficelle, qui est fournit par l'opérateur.

On remarque une divergence lorsque $t = l_0/v_0$ (c'est-à-dire quand $r = 0$). En réalité, le trou à un certain rayon et cette expression n'est plus valable lorsque r devient inférieur à ce rayon.

IV Pendule conique [•••]



1 - Il est judicieux de calculer les moments des forces par rapport au point A, car le moment de la force de tension du fil sera alors nul.

2 - Relations utiles : $AO = L\cos\alpha$ et $R = L\sin\alpha$.

⋆ Deux forces s'exercent sur la masse : le poids, et la tension du fil.

Le moment en A de la tension est nul.

Le moment du poids en A s'écrit :

$$\vec{\Gamma}_A(\vec{P}) = \overrightarrow{AM}\wedge\vec{P} = (-AO\vec{e}_z + R\vec{e}_r)\wedge(-mg\vec{e}_z) = Rmg\vec{e}_\theta = Lmg\sin\alpha\,\vec{e}_\theta.$$

⋆ Moment cinétique en A de la masse m :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_A &= \overrightarrow{AM}\wedge m\vec{v} = (-AO\vec{e}_z + R\vec{e}_r)\wedge mR\dot{\theta}\vec{e}_\theta\\ &= mR\dot{\theta}(AO\vec{e}_r + R\vec{e}_z)\\ &= mR\omega(AO\vec{e}_r + R\vec{e}_z)\end{aligned}$$

Il faudra calculer la dérivée de ceci. Seul $\vec{e}_r$ dépend du temps dans cette expression, et sa dérivée est $\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ (avec ici $\dot{\theta} = \omega$ la vitesse angulaire constante). Donc :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_A}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}(mR\omega AO\vec{e}_r)}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}(mR^2\omega\vec{e}_z)}{\mathrm{d}t}}_{=\vec{0}}\\ &= mR\omega AO\times\omega\vec{e}_\theta\\ &= mL\sin\alpha\omega^2 L\cos\alpha\,\vec{e}_\theta.\end{aligned}$$

⋆ Finalement le théorème du moment cinétique en A, appliqué au point M dans le référentiel d'étude galiléen, donne :

$$mL\sin\alpha\omega^2L\cos\alpha\,\vec{e}_\theta = Rmg\vec{e}_\theta = Lmg\sin\alpha\,\vec{e}_\theta \quad \text{d'où} \quad \boxed{\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 L}.}$$

Interprétation :

– Si $\omega\to+\infty$, alors $\cos\alpha = 0$ et donc $\alpha = \pi/2$, ce qui se comprend intuitivement.

– Il n'y aucune solution si $\dfrac{g}{\omega^2L} > 1$, donc si $\omega < \sqrt{\dfrac{g}{L}}$.
Ceci signifie que si on lance le pendule avec une vitesse initiale trop faible, donc ω trop faible, alors il ne peut pas y avoir d'état stationnaire comme supposé dans l'énoncé (il y aura des oscillations du pendule).

– On peut faire une application numérique : si $\omega = 2\pi\,\mathrm{rad/s}$ (un tour par seconde) et $L = 30\,\mathrm{cm}$, alors $\alpha = 34°$.