Devoir Surveillé

Correction – Physique-chimie – DS 7

I Suspension de voiture

Première partie : suspension sans amortissement

1 - Système {véhicule}. Bilan des forces :

- Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$,
- action du ressort : $\vec{F} = -k(l-l_0)\vec{u}_{\text{ext}} = -k(z-l_0)\vec{e}_z$.

Le véhicule ne touche pas le sol, il n'y a donc pas de force de réaction du sol.

2 - À l'équilibre la somme des forces est nulle, donc $\vec{P}+\vec{F} = \vec{0}$, d'où $-mg - k(z_e - l_0) = 0$, d'où $\boxed{z_e = l_0 - \dfrac{mg}{k}.}$

3 - Référentiel d'étude supposé galiléen, PFD appliqué au système {véhicule} :
$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{P}$. Or ici $\vec{a} = \ddot{z}\vec{e}_z$. Donc on a

$$m\ddot{z}\vec{e}_z = -mg\vec{e}_z - k(z-l_0)\vec{e}_z.$$

On projette sur $\vec{e}_z$, on réarrange :

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z(t) = \underbrace{-g + \frac{kl_0}{m}}_{z_e\times k/m}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\ddot{z} + \frac{k}{m}z(t) = \frac{k}{m}z_e.}$$

4 - Il s'agit de l'équation de l'oscillateur harmonique : on pose $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ pour avoir $\ddot{z}+\omega_0^2 z = \omega_0^2 z_e$.

La solution de l'équation homogène est $z_H(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. Celle de l'équation particulière est $z_P = z_e$.

On a donc $\boxed{z(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + z_e.}$

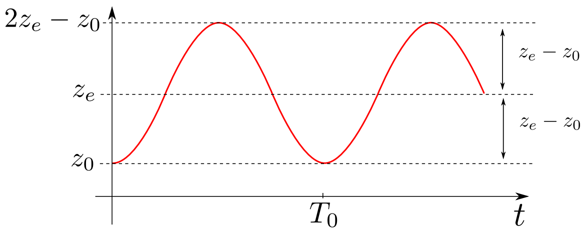
On a $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 10\,\text{rad/s}}$ et $\boxed{T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 0{,}63\,\text{s}.}$

5 - CI1 : $z(0) = z_0$. Or $z(0) = A + z_e$, donc $A = z_0 - z_e < 0$.

CI2 : $\dot{z}(0) = 0$. Or $\dot{z}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$ et donc $\dot{z}(0) = B\omega_0$. Conclusion : $B = 0$.

On a donc $\boxed{z(t) = (z_0 - z_e)\cos\omega_0 t + z_e.}$

6 - Il s'agit de l'opposé d'un cosinus (car $z_0 - z_e < 0$), centré autour de z_e. La valeur minimale est à $t = 0$, avec $z(0) = z_0$.



Deuxième partie : suspension avec amortissement

7 - $F = hv$ donc l'unité de h est $[h] = \dfrac{[F]}{[v]} = \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$.

Or par exemple $F = ma$ donc $[F] = \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}$, donc $[h] = \dfrac{\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}}{\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$, soit donc $\boxed{[h] = \mathrm{kg \cdot s^{-1}}.}$

8 - Système {véhicule}. Bilan des forces :

- Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$,
- action du ressort : $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{\text{ext}} = -k(z - l_0)\vec{e}_z$,
- amortisseur : $\vec{f} = -h\vec{v} = -h\dot{z}\vec{e}_z$.

À l'équilibre, $\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = \vec{0}$. Or comme $\vec{f} = \vec{0}$ à l'équilibre, on retrouve la même chose que dans la partie précédente, c'est-à-dire une côte à l'équilibre $z = z_e = l_0 - mg/k$.

9 - Référentiel d'étude supposé galiléen, PFD appliqué au système {véhicule} :

$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{f}$. Or ici $\vec{a} = \ddot{z}\vec{e}_z$. Donc on a

$$m\ddot{z}\vec{e}_z = -mg\vec{e}_z - k(z - l_0)\vec{e}_z - h\dot{z}\vec{e}_z.$$

On projette sur $\vec{e}_z$, on réarrange :

$$\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z(t) = \underbrace{-g + \frac{kl_0}{m}}_{z_e \times k/m}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z(t) = \frac{k}{m}z_e.}$$

10 - Il s'agit d'une équation du second ordre. On calcule le discriminant de l'équation caractéristique :

$$\Delta = \frac{h^2}{m^2} - 4\frac{k}{m} = \frac{h^2 - 4km}{m^2}.$$

Ainsi on a régime apériodique si $\Delta > 0$, si $h^2 > 4km$.

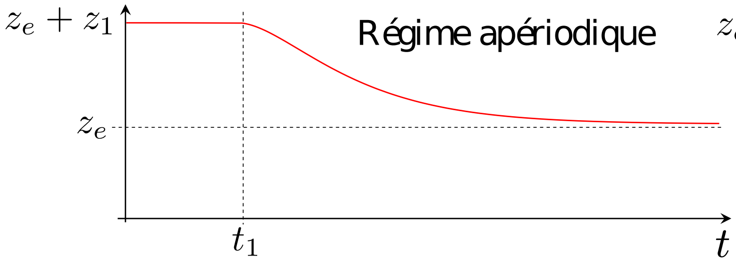
Régime critique pour $\Delta = 0$, donc pour $h^2 = 4km$.

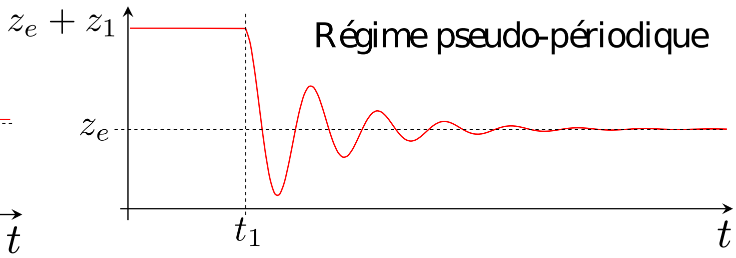
Régime pseudo-périodique si $\Delta < 0$, si $h^2 < 4km$.

11 - 1 - L'amortissement est d'abord en régime critique, donc $h^2 = 4km$. Ensuite le véhicule est chargé, donc m augmente, donc $4km$ devient supérieur à h^2 et on entre en régime pseudo-périodique.

2 - Il n'est pas souhaitable d'être en régime pseudo-périodique, car alors il y a de nombreuses oscillations. Il faut donc choisir h pour avoir $h^2 > 4km$ avec m la masse maximale du véhicule chargé.

12 - Il s'agit d'étudier la réponse à un échelon, c'est-à-dire de spécifier la nature du régime transitoire de retour à l'équilibre. On a dans les deux cas une hauteur z_e par rapport à la route pour $t < t_1$ et aussi pour $t \gg t_1$.





Ceci correspond par exemple à la descente d'un trottoir, et le cas pseudo-périodique n'est pas souhaitable pour une voiture !

Troisième partie : régime forcé

13 - $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{\text{ext}} = -k(z - z_s - l_0)\vec{e}_z$, car la longueur du ressort est maintenant $l = z - z_s$.

14 - Même démarche que précédemment, on aboutit à :

$$m\ddot{z}\vec{e}_z = -mg\vec{e}_z - k(z - z_s - l_0)\vec{e}_z - h(\dot{z} - \dot{z}_s)\vec{e}_z.$$

On projette sur $\vec{e}_z$ et on réarrange :

$$\ddot{z} = -g - \frac{k}{m}(z - z_s - l_0) - \frac{h}{m}(\dot{z} - \dot{z}_s)$$

$$\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{kl_0}{m} - g + \frac{h}{m}\dot{z}_s + \frac{k}{m}z_s$$

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_e + \frac{h}{m}\dot{z}_s(t) + \frac{k}{m}z_s(t).}$$

15 - On pose $z'(t) = z(t) - z_e$. On a donc $z(t) = z'(t) + z_e$, et en dérivant $\dot{z} = \dot{z}'$ et $\ddot{z} = \ddot{z}'$. On remplace donc dans l'équation ci-dessus :

$$\ddot{z}' + \frac{h}{m}\dot{z}' + \frac{k}{m}(z' + z_e) = \frac{k}{m}z_e + \frac{h}{m}\dot{z}_s(t) + \frac{k}{m}z_s(t),$$

d'où après simplification du terme en kz_e/m :

$$\boxed{m\ddot{z}' + h\dot{z}' + kz' = h\dot{z}_s(t) + kz_s(t), \quad \text{et on pose} \quad Y(t) = h\dot{z}_s(t) + kz_s(t).}$$

16 - $\star$On passe l'équation précédente en régime complexe, donc :

$$m(\mathrm{j}\omega^2)\underline{z}' + h\mathrm{j}\omega\underline{z}' + k\underline{z}' = h\mathrm{j}\omega\underline{z}_s + k\underline{z}_s.$$

On isole ensuite le rapport $\underline{z}'/\underline{z}_s$, donc :

$$(-m\omega^2 + h\mathrm{j}\omega + k)\underline{z}' = (h\mathrm{j}\omega + k)\underline{z}_s, \quad \text{d'où} \quad \frac{\underline{z}'}{\underline{z}_s} = \frac{h\mathrm{j}\omega + k}{-m\omega^2 + h\mathrm{j}\omega + k}.$$

Après division par m :

$$\frac{\underline{z}'}{\underline{z}_s} = \frac{k/m + \mathrm{j}\omega\, h/m}{k/m - \omega^2 + \mathrm{j}\omega\, h/m}, \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\underline{z}'}{\underline{z}_s} = \frac{\omega_0^2 + 2\lambda\mathrm{j}\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\lambda\mathrm{j}\omega}}.$$

$\star$Il faut ensuite prendre le module de l'expression précédente :

$$\boxed{H = \left|\frac{\underline{z}'}{\underline{z}_s}\right| = \frac{\sqrt{\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}}.$$

17 - 1 - Pour $\omega \to 0$, on a $H = 1$. Ainsi la masse m suit exactement les mouvements du sol, l'amortissement ne joue aucun rôle.

2 - Pour $\omega \to +\infty$, on a $H = 0$. Ainsi la masse m n'oscille plus. L'amortissement joue donc le rôle de filtre passe-bas, en coupant les hautes fréquences.

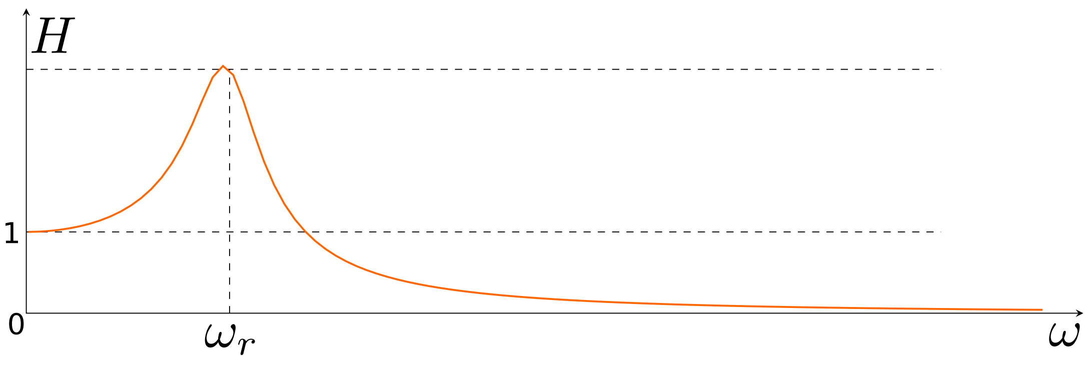
3 - Le dénominateur est minimal lorsque la fonction $f(x) = (x^2 - \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2 x^2$ est minimale.

Or $f'(x) = 2 \times 2x(x^2 - \omega_0^2) + 8\lambda^2 x$, donc $f'(x) = 0$ est équivalent à $x = 0$ ou $4(x^2 - \omega_0^2) + 8\lambda^2 = 0$.

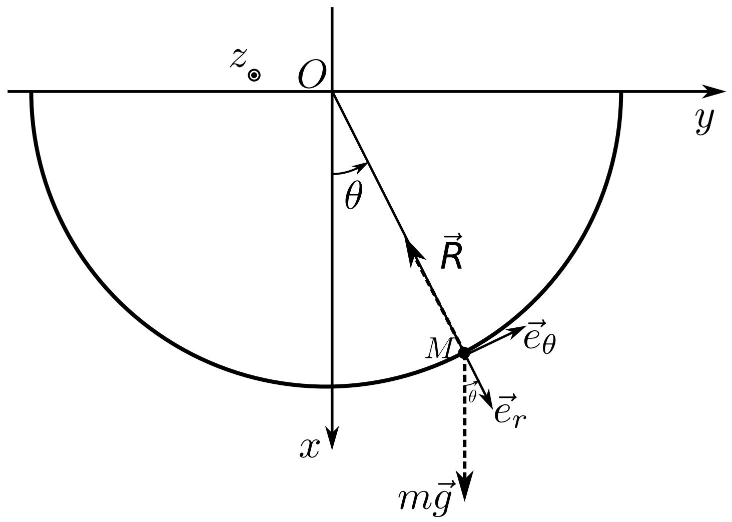
On exclut le cas $x = 0$, donc il reste $4x^2 = 4\omega_0^2 - 8\lambda^2$, soit $x^2 = \omega_0^2 - 2\lambda^2$, ce qui est positif par hypothèse, donc $\boxed{\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}.}$

Lorsque $\omega = \omega_r$ le système est à la résonance. Il oscille alors avec une amplitude maximale, ce qui n'est pas bon pour la voiture !

18 - Allure :



II Snowbord dans un half-pipe



19 - ⋆ Référentiel terrestre galiléen. Coordonnées polaires.

⋆ Bilan des forces sur le système {snowboarder} (cf schéma pour les projections) :

- Poids $\vec{P} = mg\cos\theta\,\vec{e}_r - mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta$.
- Réaction $\vec{N} = N\vec{e}_r$ avec $N < 0$ (et pas de composante selon $\vec{e}_\theta$ car pas de frottements)

⋆ Accélération : on part de la position et on dérive :

- $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$
- $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$
- $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

⋆ PFD au système {snowboarder} :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N},$$

d'où :

$$mR\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - mR\dot{\theta}^2\vec{e}_r = mg\cos\theta\,\vec{e}_r - mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta + R\vec{e}_r$$

Projection sur $\vec{e}_\theta$: $mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$, d'où :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0.}$$

20 - On a donc

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\dot{\theta}\sin\theta = 0,$$

d'où :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{R}\cos\theta\right) = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{R}\cos\theta = \text{cst}$$

On obtient la constante en évaluant l'expression à $t = 0$: on a $\dot{\theta} = 0$ car pas de vitesse initiale et $\cos\theta = \cos\pi/2 = 0$, donc la constante est nulle.

On a donc finalement :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{R}\cos\theta = 0, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}\cos\theta.}$$

21 - On utilise cette fois la projection sur $\vec{e}_r$ du PFD : $-mR\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta + N$.

On isole N et on remplace $\dot{\theta}^2$ par l'expression obtenue à la question précédente :

$$N = -mg\cos\theta - mR\frac{2g}{R}\cos\theta, \text{ soit } \boxed{N = -3mg\cos\theta.}$$

Ainsi $\vec{N} = -3mg\cos\theta\vec{e}_r$, dont la norme est maximale en $\theta = 0$ (donc au centre du half-pipe) et vaut alors $\boxed{N_{\text{max}} = 3mg.}$ À ce moment là, le snowboarder a la sensation de peser trois fois son propre poids.

22 - Ceci change la constante d'intégration : $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{R}\cos\theta = \text{cst} = \frac{1}{2}\dot{\theta}_0^2$.

On a donc $-mR\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta + N$ qui donne $N = -3mg\cos\theta - mR^2\dot{\theta}_0^2$.

La norme de $\vec{N}$ est donc $\boxed{\|\vec{N}\| = 3mg\cos\theta + mR^2\dot{\theta}_0^2.}$

Elle est minimale lorsque le cosinus vaut -1, donc en $\theta = \pi$, c'est-à-dire au sommet du looping. Elle vaut alors $\boxed{\|\vec{N}\|_{\text{min}} = mR^2\dot{\theta}_0^2 - 3mg.}$

La vitesse initiale doit donc être telle que ceci est supérieur à 0, donc telle que $mR^2\dot{\theta}_0^2 > 3mg$, soit donc $\boxed{\dot{\theta}_0 > \sqrt{\frac{3g}{R}},}$ et donc

$$\boxed{v_0 = R\dot{\theta}_0 > \sqrt{3Rg} = 17\,\text{m/s} = 62\,\text{km/h}.}$$

III Filtre ADSL

23 - Pour récupérer seulement les signaux téléphoniques il faut un filtre passe-bas.

Pour récupérer seulement les signaux informatiques il faut un filtre passe-haut.

On peut proposer une fréquence de coupure f_0 autour de $10\,\text{kHz}$.

24 - À basses fréquences, les bobines sont équivalentes à des fils. On a donc $s = 0$.

À hautes fréquences, les bobines sont équivalentes à des interrupteurs ouvert. On montre alors que le courant parcourant les résistances est nul. Celles-ci ne jouent donc aucun rôle. On a donc $s = e$.

Il s'agit donc d'un filtre passe-haut.

La sortie s doit donc correspondre au signal fourni à la box internet.

25 - a - Diviseur de tension : $\boxed{\underline{s} = \underline{u} \times \dfrac{\mathrm{j}L\omega}{R + \mathrm{j}L\omega}.}$

b - Soit $\underline{Z}$ l'impédance regroupant la résistance de droite et les deux bobines.

On a $\dfrac{1}{\underline{Z}} = \dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \dfrac{1}{R + \mathrm{j}L\omega}$, soit donc $\boxed{\underline{Z} = \dfrac{\mathrm{j}L\omega(R + \mathrm{j}L\omega)}{R + 2\mathrm{j}L\omega}.}$

On réalise alors un schéma équivalent, et on voit avec un diviseur de tension que l'on a $\boxed{\underline{u} = \underline{e} \times \dfrac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R}.}$

26 - a - $\star$ Hautes fréquences : $\underline{H} \sim \dfrac{-x^2}{-x^2} = 1$, $\boxed{\underline{H} \sim 1.}$

$\star$ Basses fréquences : $\underline{H} \sim \dfrac{-x^2}{1} = -x^2$, $\boxed{\underline{H} \sim -x^2.}$

b - $\star$ Pour le gain :

On a $G_{\mathrm{dB}} = 20 \log |\underline{H}|$.

À hautes fréquences on a donc $G_{\mathrm{dB}} \sim 20 \log(1) = 0$.

À basses fréquences $G_{\mathrm{dB}} \sim 20 \log |-x^2| = 40 \, \log x$, soit une pente de $+40\,\mathrm{dB}$ par décade.

$\star$ Pour la phase :

$\varphi = \arg(\underline{H})$.

À hautes fréquences on a donc $\varphi \sim \arg(1) = 0$.

À basses fréquences $\varphi \sim \arg(-x^2) = \pi$ car il s'agit d'un réel négatif.

c - Voir allure d'un filtre passe-haut du deuxième ordre, sans résonance ici.

27 - $\star$ $\boxed{|\underline{H}| = \dfrac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 9x^2}}.}$

$\star$ $\arg(\underline{H}) = \arg(-x^2) - \arg(1 - x^2 + 3\mathrm{j}x)$.

Or $\arg(-x^2) = \pi$.

Et on a $\arg(1 - x^2 + 3\mathrm{j}x) = \arctan \dfrac{3x}{1 - x^2}$ si la partie réelle est positive, donc si $x < 1$,

et $\arg(1 - x^2 + 3\mathrm{j}x) = \pi + \arctan \dfrac{3x}{1 - x^2}$ si la partie réelle est négative, donc si $x > 1$.

Donc finalement

$$\boxed{\arg(\underline{H}) = \pi - \arctan \frac{3x}{1 - x^2} \text{ si } x < 1 \quad \text{et} \quad \arg(\underline{H}) = \arctan \frac{3x}{1 - x^2} \text{ si } x > 1.}$$