Mécanique
Chapitre 4

TD – Mouvement des particules chargées

Remarque : exercice avec $\star$: exercice particulièrement important, à maîtriser en priorité (de même que les exercices de cours) | [$\bullet \circ \circ$] : difficulté des exercices

I Sélecteur de vitesse [$\bullet \circ \circ$]

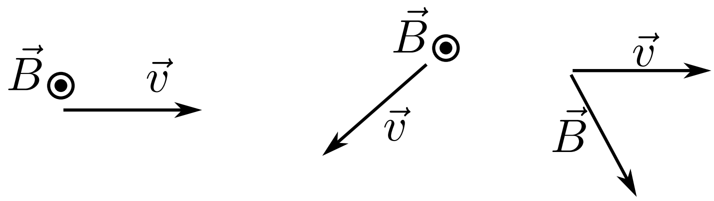
Une particule de masse m et de charge q pénètre avec une vitesse $\vec{v} = v_0\vec{e}_x$ dans une zone où règnent un champ électrique $\vec{E} = E_0\vec{e}_y$ et un champ magnétique $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$, uniformes et stationnaires.

1 - À quelle condition le vecteur vitesse de la particule reste-t-il inchangé ?

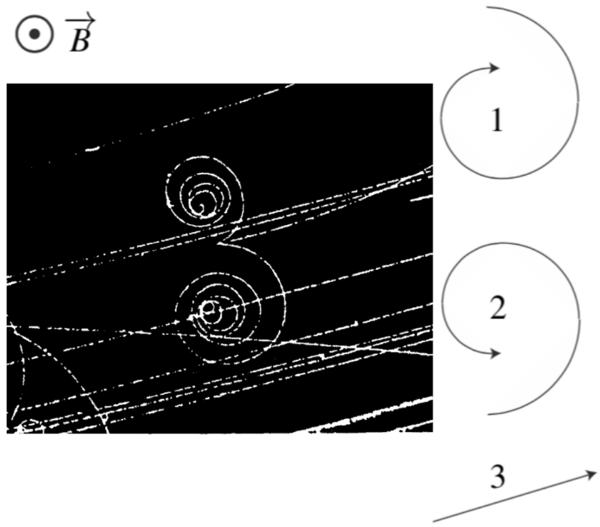
2 - Expliquer comment ce dispositif peut être adapté en sélecteur de vitesse.

II Trajectoires dans une chambre à bulles $\star$ | [$\bullet \circ \circ$]

1 - Dans chacun des cas ci-dessous, donner la direction et le sens du vecteur $\vec{v} \wedge \vec{B}$.



Les accélérateurs de particules comme le LHC provoquent des collisions entre particules de hautes énergie, et étudient les particules produites lors de telles collisions. Il faut donc pouvoir détecter et caractériser ces particules produites. Une possibilité est d'utiliser une chambre à bulles, qui est un compartiment contenant un gaz saturé : le passage d'une particule produit alors une trainée de condensation, ce qui permet donc de visualiser sa trajectoire. On produit un champ magnétique $\vec{B}$ dans la chambre à bulle afin de voir si les trajectoires sont courbées par $\vec{B}$ ou non.



source : Lawrence Berkeley Laboratory, USA

La photographie ci-contre représente un cliché des traces observées lors de la protuction d'une paire électron-positron. Sur le côté droit, on a schématisé les trois types de trajectoires observées avec leur sens de parcours.

2 - Déterminer le signe de la charge dans chacun des trois cas type.

3 - Expliquer pourquoi les trajectoires ne sont pas circulaires, mais en spirale avec un rayon qui diminue.

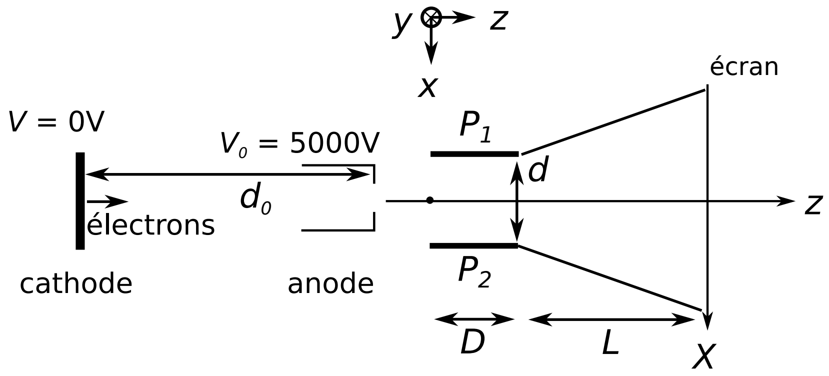
III Déflection dans un tube cathodique ★ | [● ● ○]

Les anciens oscilloscopes, les anciennes télévisions cathodiques, ou encore le canon à électron montré en expérience de cours, fonctionnent tous sur le même principe : des électrons sont produits à une cathode (par un filament chauffé par exemple), et son accélérés en ligne droite par une différence de potentiel importante entre la cathode et une anode.

Ce faisceau d'électrons entre ensuite dans une zone où règne un champ électrique perpendiculaire, produit par deux plaques P_1 et P_2, et d'intensité réglable. Ceci sert à dévier les électrons de façon controlée.

Enfin, les électrons sortent de cette zone et arrivent dans une zone où $\vec{E} = \vec{0}$, puis impactent un écran fluorescent, ce qui produit de la lumière.

Nous étudions ici un tel dispositif. L'ensemble est placé sous vide. Le poids est négligé. On note m la masse des électrons et $-e$ leur charge.



1 - Donner l'expression de la vitesse v_0 des électrons en sortie de l'anode, en fonction de V_0, e et m.

2 - On s'intéresse ensuite à la déviation entre les plaques P_1 et P_2. On note $U = V_{P_2} - V_{P_1} > 0$. Donner l'expression de la force subie par les électrons en fonction de U, d, e et un vecteur de la base.

3 - On suppose que les électrons arrivent dans cette zone au point O, avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_z$ calculée à la question 1. Établir l'évolution du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ dans cette zone, puis des coordonnées $x(t)$ et $z(t)$.

4 - En déduire l'angle de déviation entre l'entrée et la sortie de cette zone (défini comme l'angle entre $\vec{v}$ à la sortie et l'horizontal).

5 - Bonus : déterminer l'abscisse X_p du point d'impact sur l'écran.

IV Démonstration de la nature circulaire du mouvement dans un champ $\vec{B}$ [● ● ○]

On considère une charge $q > 0$ de masse m, soumise à un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$ constant. À $t = 0$ la vitesse de la charge est $\vec{v} = v_0\vec{e}_y$.

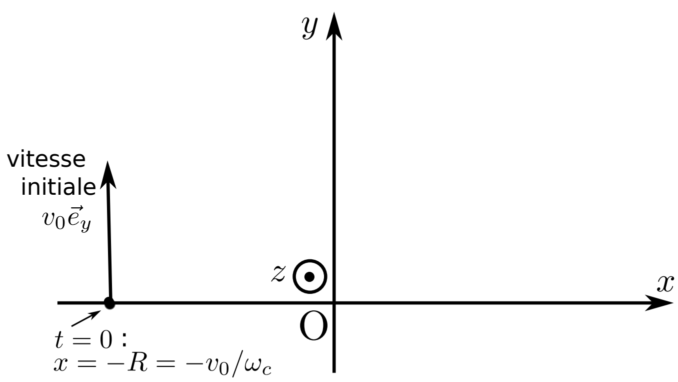
On pose

$$\omega_c = \frac{qB}{m} \quad \text{et} \quad R = \frac{v_0}{\omega_c}.$$

ω_c est appelée la pulsation cyclotron.

À $t = 0$ la charge est au point de coordonnées $y = 0$ et $x = -R$ (cf schéma).

On souhaite prouver que la trajectoire est circulaire.



1 - On utilise les coordonnées cartésiennes. Donner l'expression de la force de Lorentz dans la base $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$. Puis écrire le PFD et le projeter sur chaque vecteur de base pour obtenir une équation qui porte sur $\ddot{x}$, une sur $\ddot{y}$ et une sur $\ddot{z}$. On fera apparaitre ω_c.

2 - En utilisant celle sur $\ddot{z}$, en déduire que le mouvement a lieu dans le plan xOy.

3 - En intégrant une fois l'équation sur $\ddot{x}$, en déduire l'expression de $\dot{x}$ en fonction de m, q, B et $y(t)$.

De même, en intégrant une fois l'équation sur $\ddot{y}$, en déduire l'expression de $\dot{x}$ en fonction de m, q, B et $x(t)$.

4 - En injectant les expressions précédentes de $\dot{x}$ et $\dot{y}$ dans les équations obtenues à la question 1, en déduire les deux équations suivantes :

$$\ddot{x} + \omega_c^2 x = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{y} + \omega_c^2 y = 0.$$

5 - Résoudre ces deux équations pour obtenir $x(t)$ et $y(t)$.

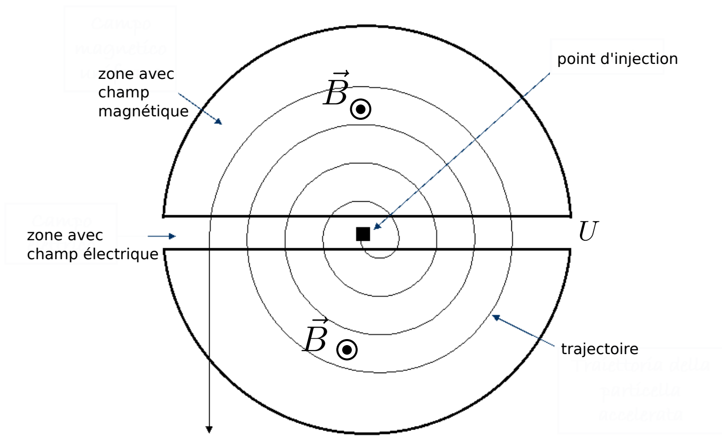
6 - Montrer que $x(t)^2 + y(t)^2 = R^2$, ce qui prouve que la trajectoire est circulaire de rayon R.

Remarque : on a fait d'emblée le choix d'un repère tel que $x(0) = -R$ avec R le rayon du cercle de la trajectoire. On a donc un peu triché, car on savait déjà que $R = v_0/\omega_c$ serait ledit rayon. Mais les résultats obtenus ne dépendent pas du repère choisi : quel qu'il soit, la trajectoire est un cercle de rayon $R = v_0/\omega_c$.

V Cyclotron [● ● ○]

Un cyclotron est un des premiers accélérateurs de particules utilisés pour l'étude de la matière. Il est constitué de deux demi-cylindres conducteurs creux horizontaux appelés “dees”, séparés par un intervalle étroit. Les deux “dees” plongent dans un champ magnétique uniforme vertical. Une tension électrique alternative $U(t)$ est appliquée entre les deux “dees”.

La valeur du champ magnétique dans les dees est $B = 0{,}1\,\text{T}$. L'amplitude de la tension créneau générant le champ électrostatique entre les dees est $U_m = 2{,}5 \cdot 10^3\,\text{V}$. Les particules accélérées sont des protons (masse $m_p = 1.67 \times 10^{-27}\,\text{kg}$, charge $e = 1.602 \times 10^{-19}\,\text{C}$).



1 - On admet que dans un dee, le mouvement est circulaire et uniforme. Donner l'expression du rayon R de la trajectoire en fonction de la vitesse v de la particule, de sa masse m et charge q, et de la norme B de $\vec{B}$.

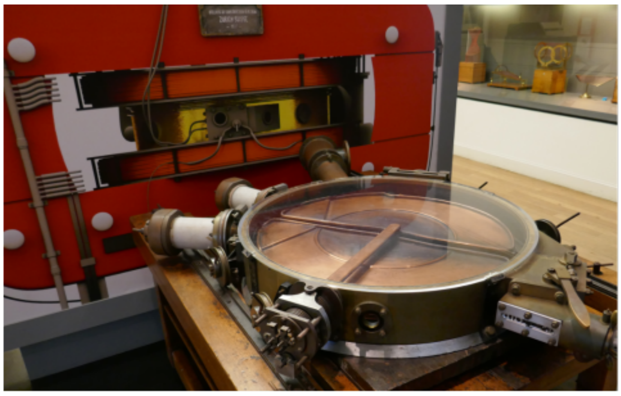
2 - Exprimer le temps mis pour parcourir un demi-tour dans un dee. Ce temps dépend-il de la vitesse du proton ?

3 - En déduire la fréquence f de la tension à appliquer entre les dees pour que le champ électrique entre les dees accélère les protons à chaque passage (on considère que le temps de passage entre les deux dees est négligeable devant le temps passé dans chaque dee).

4 - Exprimer puis calculer numériquement l'augmentation d'énergie cinétique à chaque accélération.

5 - La vitesse d'injection du proton étant quasi nulle, on désire que sa vitesse atteigne $15 \cdot 10^3\,\mathrm{km/s}$. Calculer le nombre de demi tours que doit faire le proton dans le cyclotron ainsi que le temps nécessaire à cette opération.

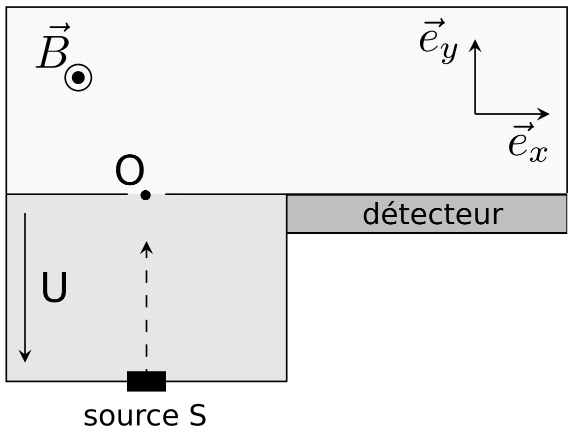
6 - Quel est le rayon du dernier arc de cercle parcouru par les protons lorsqu'ils ont atteint cette vitesse ?



Cyclotron du Collège de France (Paris, 1937).
On voit sur l'image en arrière plan une représentation des bobines permettant de créer le champ magnétique.

VI Spectromètre de masse [• • ○]

Un spectromètre de masse est un appareil permettant d'identifier les éléments présents dans un échantillon de matière inconnu.
Pour cela, l'échantillon est ionisé à l'entrée de l'appareil, si bien que des ions pénètrent en ligne droite à partir de l'entrée en S.
Ces ions sont de vitesses négligeables en S. On note m leur masse et q leur charge. Ils sont accélérés entre S et O par l'application d'une différence de potentiel U.
Ils pénètrent ensuite en O dans une chambre où règne un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et stationnaire, sont déviés par ce champ et vont frapper un détecteur.
On supposera que les ions sont chargés positivement.



1 - Donner l'expression de la vitesse v_0 de l'ion en O, en fonction de sa charge, masse, et de U.

2 - Justifier que dans la chambre où règne le champ magnétique, l'énergie cinétique de l'ion ne varie pas.

Que peut-on donc dire de sa vitesse ?

3 - On admet que la trajectoire de l'ion dans la chambre où règne le champ magnétique est circulaire. Établir l'expression du rayon de la trajectoire en fonction de B, q, m, U.

4 - Les spectromètres de masse sont des outils utilisés dans de nombreux domaines, autant en laboratoire que sur le terrain. Le robot Curiosity sur Mars en comprend un, qui a notamment été utilisé pour déterminer le rapport de l'abondance isotopique entre hydrogène et deutérium, ce qui apporte des informations sur l'évaporation de l'eau sur cette planète.

(cf https://ssed.gsfc.nasa.gov/sam/samiam.html)

On note P le point d'impact de l'ion sur le détecteur. Donner la valeur de la distance OP pour un ion hydrogène H^+ et pour un ion deutérium D^+ (le deutérium est un isotope de l'hydrogène, qui contient deux nucléons).

On donne $U = 10\,\mathrm{kV}$, masse du proton $m_p = 1.67\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$, charge élémentaire $e = 1.602\times10^{-19}\,\mathrm{C}$, valeur du champ magnétique $B = 200\,\mathrm{mT}$.