Étude des systèmes linéaires
Chapitre 5

TP 14 – Associations de filtres

Matériel : Oscilloscope, GBF, $C = 100\,\text{nF}$ ($\times 2$), $R = 1{,}0\,\text{k}\Omega$ ($\times 2$), ALI et son alimentation, plaquette.

Objectifs : comprendre comment associer plusieurs filtres les uns à la suite des autres pour concevoir un filtre plus complexe, tout en gérant l'adaptation d'impédance.

I Mise en cascade de filtres

I.1 Filtres passe-bas et passe-haut

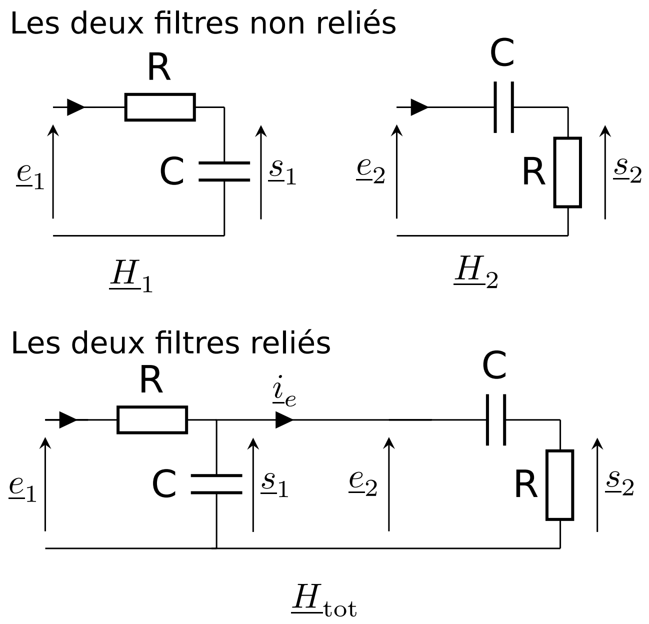
1 - À l'aide d'une résistance R et d'une capacité C, proposer un montage (donc faire un schéma) permettant de réaliser un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure $f_c = 1\,\text{kHz}$ environ (on précisera la valeur exacte).

2 - De même, proposer un montage permettant de réaliser un filtre passe-haut de même fréquence de coupure.

3 - Réaliser ces deux montages et vérifier rapidement que le comportement attendu est le bon (prendre un signal d'entrée sinusoïdal et faire un balayage en fréquence).

I.2 Mise en cascade

On souhaite associer les deux filtres précédents afin de réaliser un filtre passe-bande. On va dans un premier temps simplement mettre les deux filtres en cascade : on relie la sortie du filtre passe-bas à l'entrée du filtre passe-haut.



L'idée est que le premier filtre coupe les hautes fréquences, le second les basses fréquences, et donc l'ensemble forme un passe bande. C'est bien correct, mais nous allons chercher à savoir ce que vaut précisément la fonction de transfert de cet assemblage.

Notons $\underline{H}_1 = \underline{s}_1/\underline{e}_1$ et $\underline{H}_2 = \underline{s}_2/\underline{e}_2$ les fonctions de transfert des filtres 1 et 2 lorsqu'ils sont en "sortie ouverte", c'est-à-dire lorsque rien n'est connecté sur leur sortie (comme sur le schéma du haut ci-contre).

Comme nous relions la sortie s_1 à l'entrée e_2 (cf schéma précédent, donc $s_1 = e_2$), nous nous attendons simplement à avoir :

$$\underline{H}_{\text{tot}} \underset{\text{par définition}}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{\underline{s}_2}{\underline{e}_1} \underset{\text{car s1=e2}}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{\underline{s}_2}{\underline{e}_2} \times \frac{\underline{s}_1}{\underline{e}_1} \underset{\text{par définition}}{\underset{\uparrow}{=}} \underline{H}_2 \times \underline{H}_1,$$

c'est-à-dire une multiplication entre elles des fonctions de transfert.

Si on admet ceci, alors un calcul rapide montre qu'on a :

$$\underline{H}_{\text{tot}} = \underline{H}_2 \times \underline{H}_1 = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} \times \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} = \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1 + \mathrm{j}RC\omega} \times \frac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega} = \frac{\mathrm{j}\omega/\omega_0}{1 - \omega^2/\omega_0^2 + 2\mathrm{j}\,\omega/\omega_0}, \tag{1}$$

avec $\omega_0 = 1/RC$. C'est la fonction de transfert d'un filtre passe-bande de facteur de qualité $\boxed{Q = 1/2}$ (car c'est $1/Q$ qui est en facteur de $\mathrm{j}\omega/\omega_0$ au dénominateur).

<u>Nous allons tester si c'est bien le cas expérimentalement</u>.

a/ Mise en cascade sans adaptation d'impédance

4 - Réaliser l'association des deux filtres en cascade, comme sur le schéma du I.2.

Proposer alors un protocole permettant de mesurer les deux fréquences de coupure (rappelez-vous de la définition de ces fréquences). Mettre en œuvre ce protocole.

5 - Pour un passe-bande, le facteur de qualité est donné par $Q = f_0/\Delta f$, avec Δf la largeur de la bande passante et ici $f_0 = 1/(2\pi RC)$ la fréquence de résonance. En déduire la valeur du facteur de qualité de votre montage.

6 - Ceci est-il compatible avec la valeur $Q = 1/2$ attendue si $\underline{H}_{\text{tot}} = \underline{H}_2 \times \underline{H}_1$?

En fait, si on fait un calcul complet de la fonction de transfert du circuit où les deux filtres sont reliés, on obtient :

$$\underline{H}_{\text{tot}} = \frac{\mathrm{j}\omega/\omega_0}{1 - \omega^2/\omega_0^2 + 3\mathrm{j}\,\omega/\omega_0}, \tag{2}$$

avec $\omega_0 = 1/RC$. Le facteur de qualité est alors $\boxed{Q = 1/3.}$

7 - Est-ce, cette fois, compatible avec votre mesure précédente ?

b/ Explication du problème

Il faut donc expliquer pourquoi le raisonnement mené dans l'équation 1, où on multiplie les fonctions de transferts $\underline{H}_1$ et $\underline{H}_2$, est faux et ne mène pas à l'expression 2.

$\rightarrow$ Il est en réalité faux d'utiliser l'expression $\underline{H}_1 = \dfrac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R}$, car l'utilisation du diviseur de tension n'est correcte que si R et C sont en série, donc uniquement si $\underline{i}_e = 0$, ce qui n'est plus le cas lorsqu'on associe les deux filtres.

En fait, $\underline{H}_1 = \dfrac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R}$ est l'expression de la fonction de transfert du filtre 1 lorsqu'il est en **sortie ouverte** (courant de sortie nul).

c/ Solution pour pouvoir multiplier les fonctions de transfert

Quand on calcule la fonction de transfert d'un filtre, on suppose toujours qu'il est en sortie ouverte (courant de sortie nul). Ce n'est plus le cas si on associe les filtres sans précaution, comme ici.

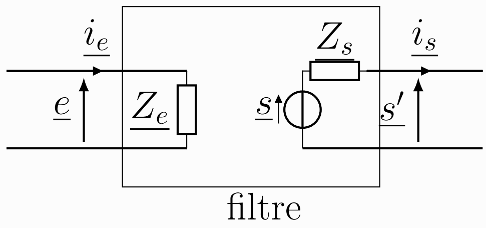
Mais multiplier les fonctions de transfert (calculées en sortie ouverte) pour avoir $\underline{H}_{\text{tot}}$ est **pratique**. Voyons quelles précautions prendre pour que ceci soit possible.

Posons quelques définitions :

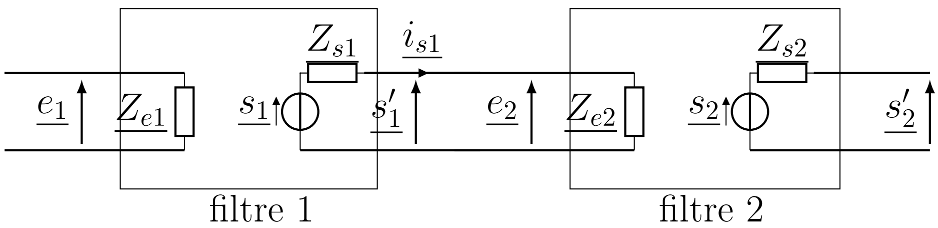
Définition : impédances d'entrée et de sortie d'un filtre

On admet qu'on peut modéliser tout filtre comme sur le schéma ci-dessous.

- **L'impédance d'entrée du filtre** est $\underline{Z_e}$. On remarque que $\underline{i_e} = \dfrac{\underline{e}}{\underline{Z_e}}$.
- **L'impédance de sortie du filtre** est $\underline{Z_s}$. Le filtre est vu comme un générateur de Thévenin d'impédance de sortie $\underline{Z_s}$.



Mettons en cascade deux filtres :



Pour que le courant intermédiaire $\underline{i_{s1}}$ soit quasiment nul, et donc que le filtre 1 soit bien en sortie ouverte, il faut que $\underline{Z_{e2}}$ soit très grande. Devant quoi ? On admet qu'il faut que $\underline{Z_{e2}} \gg \underline{Z_{s1}}$.

Conclusion sur l'adaptation d'impédance (à retenir)

Lorsque l'on connecte un bloc 1 de fonction de transfert en sortie ouverte $\underline{H_1}$ à un bloc 2 de fonction de transfert en sortie ouverte $\underline{H_2}$, il n'y a pas de modifications inattendues à condition que l'impédance de sortie du bloc 1 soit petite devant l'impédance d'entrée du bloc 2 :

$$\boxed{\underline{Z}_{1\,\text{sortie}} \ll \underline{Z}_{2\,\text{entrée}}.}$$

Quand c'est le cas on dit qu'il y a **adaptation d'impédance**.

Le courant entre les deux filtres est alors quasi-nul.
C'est seulement à cette condition que la fonction de transfert totale est

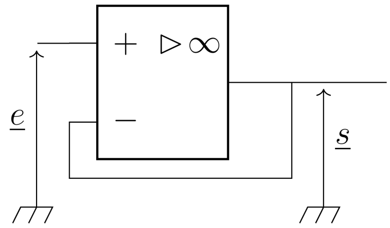
$$\boxed{\underline{H}_{\text{tot}} = \underline{H}_2 \times \underline{H}_1,}$$

avec $\underline{H}_2$ et $\underline{H}_1$ les fonctions de transfert des blocs 1 et 2 en sortie ouverte.

d/ Mise en cascade avec adaptation d'impédance

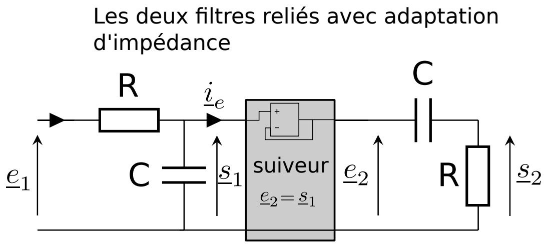
Une solution pour adapter les impédances (c'est-à-dire avoir $\underline{Z}_{1\,\text{sortie}} \ll \underline{Z}_{2\,\text{entrée}}$) est d'utiliser un montage suiveur. Un tel montage réalise la fonction de transfert $\underline{H}_{\text{suiveur}} = 1$, donc $\underline{s} = \underline{e}$. Son intérêt est que son courant d'entrée i_e est quasi-nul. Ceci revient à dire que son impédance d'entrée est quasi-infinie. De plus, son impédance de sortie est très faible. On est donc bien dans l'approximation qui permet d'avoir multiplication des fonctions de transfert.

Schéma du montage suiveur ci-contre. Le composant central est un ALI (amplificateur linéaire intégré), qui sera étudié l'an prochain. Il est nécessaire de l'alimenter avec une tension continue, et de relier sa masse aux autres masses du montage.



8 - Réaliser la mise en cascade des deux filtres, en intercalant entre les deux un suiveur (éteindre le GBF et m'appeler **avant** de le remettre en marche).

Puis en procédant comme précédemment, mesurer le facteur de qualité du filtre.



9 - Vos mesures sont-elles en accord avec $Q = 1/2$, comme prédit par le calcul de l'équation 1 ?

Bilan : l'utilisation du montage suiveur permet d'assurer que le courant de sortie du filtre 1 est quasi nul, donc d'adapter les impédances, donc d'utiliser simplement $\underline{H}_{\text{tot}} = \underline{H}_2 \times \underline{H}_1$ avec $\underline{H}_2$ et $\underline{H}_1$ les fonctions de transfert des blocs 1 et 2 en sortie ouverte.

10 - Bonus : faites les calculs théoriques qui mènent aux expressions (1) et (2) des fonctions de transfert ci-dessus.