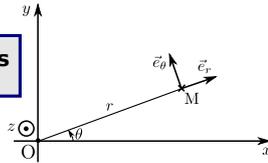


Mouvements en coordonnées non cartésiennes

I Coordonnées polaires

1 - Description des coordonnées



2 - Vecteurs position, vitesse, accélération

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r \longrightarrow \vec{v} \text{ et } \vec{a}$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$$

3 - Déplacement élémentaire

$$\vec{dl} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z \text{ à connaître}$$

$$\vec{dl} = dr\vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta \text{ à savoir retrouver (schéma)}$$

→ on en déduit $\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$

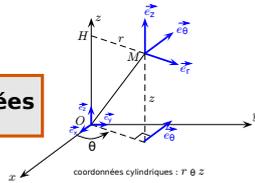
4 - Cas du mouvement circulaire

- uniforme ou non
- savoir trouver la vitesse et l'accélération

5 - Repère de Fresnel

II Coordonnées cylindriques

1 - Description des coordonnées



2 - Vecteurs position, vitesse, accélération

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z \longrightarrow \vec{v} \text{ et } \vec{a}$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

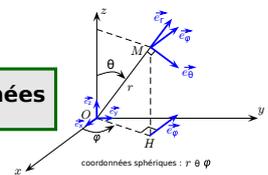
$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$$

3 - Déplacement élémentaire

$$\vec{dl} = dr\vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z \text{ à savoir retrouver (schéma)}$$

III Coordonnées sphériques

1 - Description des coordonnées



2 - Vecteurs position, vitesse, accélération

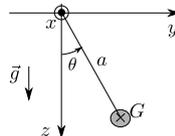
$$\vec{OM} = r\vec{e}_r \text{ et pour } \vec{v} \text{ et } \vec{a}$$

3 - Déplacement élémentaire

à savoir retrouver (schéma)

IV Application : le pendule simple

Équation du mouvement
Approximation linéaire
Résolution



↑ **Cinématique** (étude du mouvement sans s'intéresser à ses causes)

↓ **Dynamique** (étude du mouvement provoqué par l'action des forces)

Ce qu'il faut connaître

(cours : I)

- ₁ Réaliser un schéma avec les coordonnées polaires. Comment s'exprime \vec{OM} ? Quelles sont les coordonnées d'un point M? Quels sont les domaines de variations de ces coordonnées?
- ₂ Comment s'expriment $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$?
- ₃ Quelle est la définition d'un mouvement circulaire uniforme? Et circulaire non uniforme?
- ₄ Pour une trajectoire plane, vers quel lieu le vecteur accélération pointe-t-il?

(cours : II)

- ₅ Réaliser un schéma avec les coordonnées cylindriques. Comment s'exprime \vec{OM} ? Quelles sont les coordonnées d'un point M? Quels sont les domaines de variations de ces coordonnées?

- ₆ Comment s'expriment $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$?

(cours : III)

- ₇ Réaliser un schéma avec les coordonnées sphériques (faisant apparaître les vecteurs de la base locale). Comment s'exprime \vec{OM} ? Quelles sont les coordonnées d'un point M? Quels sont les domaines de variation de ces coordonnées?

Ce qu'il faut savoir faire

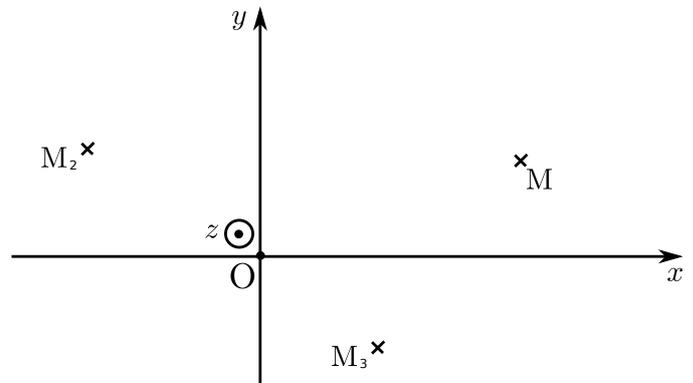
(cours : I et II)

- ▶₈ Établir les composantes des vecteurs position, vitesse et accélération dans un repère polaire (cours partie I) ou cylindrique (cours partie II). → **EC2**
- ▶₉ Exprimer à partir d'un schéma l'expression du déplacement élémentaire \vec{dl} en coordonnées cartésiennes, polaires ou cylindriques. En déduire l'expression du vecteur vitesse. cours I.3 et II.3
- ▶₁₀ Cas particulier du mouvement circulaire (uniforme ou non) : savoir retrouver les expressions des vecteurs vitesse et accélération ; identifier les liens entre rayon de la trajectoire, norme de la vitesse, sa dérivée, et les composantes de l'accélération. → **EC3, TD II**
- (cours : IV)
- ▶₁₁ Savoir mener l'étude du pendule simple à l'aide du principe fondamental de la dynamique (en coordonnées polaires) : établir l'équation du mouvement, faire l'approximation linéaire pour se ramener au cadre de l'oscillateur harmonique, résoudre l'équation. → **EC4**

Exercices de cours

Exercice C1 – Coordonnées polaires

- 1 - Pour chaque point M du schéma, dessiner les vecteurs de la base \vec{e}_r et \vec{e}_θ .
- 2 - Quelle est l'expression du vecteur position en fonction des vecteurs de la base polaire et des coordonnées polaires ?
- 3 - Établir l'expression des vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ en fonction de \vec{e}_x , \vec{e}_y et θ .



Exercice C2 – Coordonnées polaires : vitesse et accélération

On se place dans un repère en coordonnées cartésiennes à deux dimensions (dans un plan).

- 1 - Faire un schéma du repère. Placer un point M .
- 2 - Donner les expressions des vecteurs \vec{OM} , \vec{v} et \vec{a} .

On ajoute un repère en coordonnées polaires.

- 3 - Faire apparaître les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ au point M , la distance r et l'angle θ .
- 4 - D'après le cours, que valent les dérivées $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$?
- 5 - En déduire les expressions des vecteurs \vec{OM} , \vec{v} et \vec{a} dans le repère polaire.

Exercice C3 – Mouvement circulaire uniforme

On considère un point M en mouvement circulaire uniforme, de rayon R , autour d'un centre O .

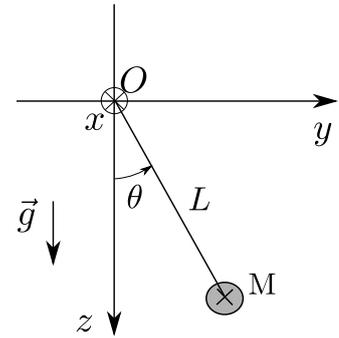
- 1 - Choisir un repère adapté à l'étude du problème. Faire un schéma.
- 2 - Exprimer le vecteur position, vitesse et accélération dans le repère de coordonnées polaires.
- 3 - Exprimer le vecteur accélération en fonction de $\|\vec{v}\|$, R et \vec{e}_r seulement.

Exercice C4 – Pendule simple

On considère un pendule dont toute la masse m est localisée au point M . Le fil reliant O à M est supposé inextensible et de masse négligeable. On note L sa longueur. On néglige tout frottement. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le champ de pesanteur est $\vec{g} = g\vec{e}_z$ avec z axe vers le bas et $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ constante.

- 1 - Exprimer le vecteur position \vec{OM} en coordonnées polaires. Faire de même pour la vitesse et l'accélération du point M .
- 2 - Faire un bilan des forces. À l'aide du PFD, en déduire une équation différentielle portant sur $\theta(t)$ uniquement.
- 3 - Faire une hypothèse qui permet de résoudre simplement cette équation. La résoudre. On supposera qu'à $t = 0$ le pendule est en $\theta = 0$ et qu'on lui communique une vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$.
- 4 - Que vaut la période des oscillations pour une masse de 1,0 kg et un fil de longueur 1,0 m ?

Remarque : le résultat de la dernière question n'est pas un hasard, mais une conséquence de la définition historique du mètre.



Cours

I – Coordonnées polaires

1 – Description des coordonnées

a/ Rappel sur les coordonnées cartésiennes dans un plan

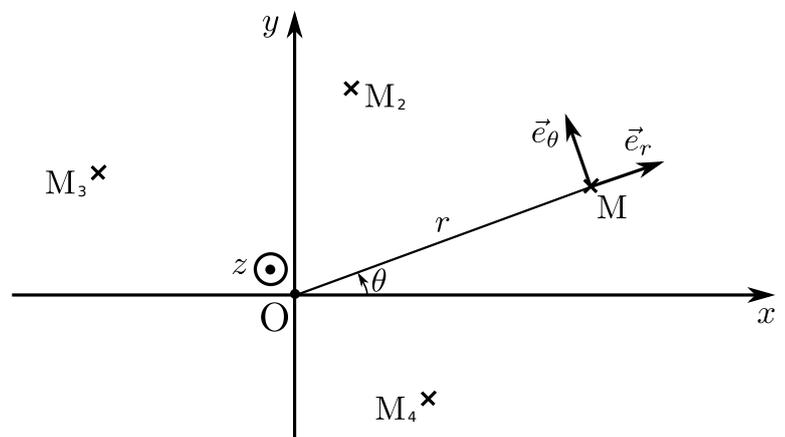
- point M repéré par ses coordonnées x et y ,
- vecteurs de la base \vec{e}_x et \vec{e}_y ,
- position $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$,
- vitesse $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$,
- accélération $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y$.

b/ Coordonnées polaires

Les coordonnées polaires permettent de repérer un mouvement dans un plan, et sont appropriées dans le cas de mouvements circulaires, elliptiques, etc.

Repérage et définitions :

- Un point M est repéré par deux coordonnées : la distance r et l'angle θ .
On a $OM = r$, et θ est l'angle entre OM et l'axe des x .
- $r \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$.
- Au point M on construit un repère orthonormé direct $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$.



Attention : La base $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ est une base locale, elle varie en fonction du point M .

Ces deux vecteurs *ne sont donc pas constants*.

En revanche ils sont bien de norme 1, sont orthogonaux entre eux et forment une base directe.

→₁ Compléter le schéma ci-dessus en faisant apparaître, pour chaque point M , les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ , la distance r et l'angle θ .

→₂ Quelle est l'expression du vecteur position \vec{OM} en fonction des coordonnées polaires et des vecteurs de la base polaire ?

Pour réviser tout ceci : **EC1**.

2 – Vecteurs position, vitesse et accélération

Dérivée des vecteurs de la base

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r.$$

Il faut connaître par cœur ce résultat.

↪₃ **Démonstration** : (à faire sur feuille) a/ Exprimer \vec{e}_r et \vec{e}_θ dans la base cartésienne. b/ Dériver par rapport au temps.

↪₄ À partir de là, il faut être capable de trouver les expressions de \vec{v} et de \vec{a} . Pour voir comment, faire l'**EC2**. Les résultats sont dans l'encadré qui suit.

Bilan en coordonnées polaires

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

(les expressions de \vec{v} et \vec{a} ne sont pas à connaître par cœur, mais à retrouver rapidement à partir de $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ que l'on dérive, comme dans l'EC2)

Remarque : on peut utiliser la notation $\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta$, avec v_r la composante de \vec{v} selon \vec{e}_r et v_θ la composante selon \vec{e}_θ . On a donc ici $v_r = \dot{r}$ et $v_\theta = r\dot{\theta}$.

De même pour $\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta$.

3 – Déplacement élémentaire

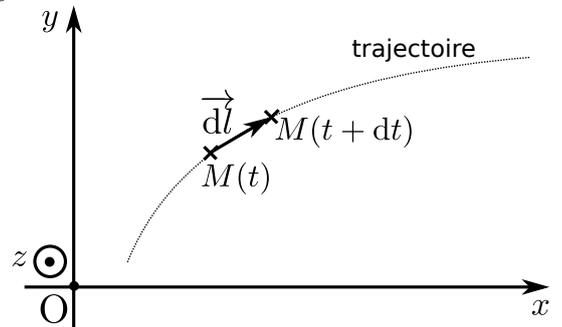
On considère un instant t , et un instant $t + dt$ très proche (dt est une durée très courte, dite *infinitésimale*).

- Instant t : le point M est en $M(t)$.
- Instant $t + dt$: le point M est en $M(t + dt)$.

On définit le déplacement élémentaire $\vec{dl} = \vec{M(t)M(t + dt)}$.

La vitesse du point M au temps t (appelée aussi vitesse instantanée)

est alors : $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{l}}{dt}$.



→ le calcul du déplacement élémentaire \vec{dl} permet d'obtenir l'expression de \vec{v} . C'est une seconde méthode pour obtenir \vec{v} .

a/ En coordonnées cartésiennes dans un plan

Les coordonnées du point M sont $x(t)$, $y(t)$.

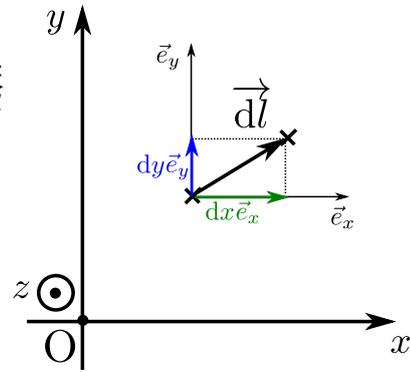
↪₅ On suppose d'abord que seule la coordonnée x varie : elle passe de x à $x + dx$. Que vaut alors \vec{dl} ? (faire un schéma)

↪₆ Puis on suppose que seule la coordonnée y varie : elle passe de y à $y + dy$. Que vaut alors \vec{dl} ? (faire un schéma)

Enfin, dans le cas général où les coordonnées varient toutes les deux : (x,y) devient $(x + dx, y + dy)$; il suffit de sommer les deux vecteurs \vec{dl} trouvés précédemment : $\vec{dl} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y$.

On généralise au cas à 3D :

$$\vec{dl} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z.$$



Cette expression en coordonnées cartésiennes est à connaître par cœur.

Vecteur vitesse

→7 À partir de l'expression du déplacement élémentaire ci-dessus et de la définition de la vitesse instantanée, retrouver l'expression de \vec{v} en coordonnées cartésiennes.

b/ En coordonnées polaires

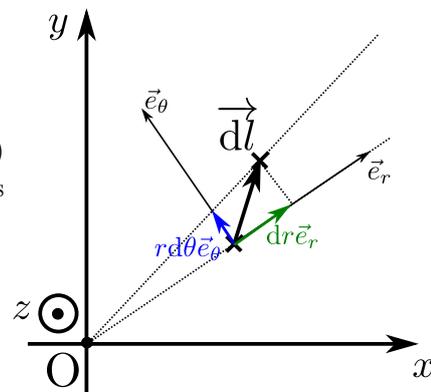
C'est le même principe, mais cette fois les coordonnées du point M sont $r(t)$ et $\theta(t)$.

→8 On suppose d'abord que seule la coordonnée r varie : elle passe de r à $r + dr$. Que vaut alors \vec{dl} ? (faire un schéma)

→9 Puis on suppose que seule la coordonnée θ varie : elle passe de θ à $\theta + d\theta$. Que vaut alors \vec{dl} ? (faire un schéma)

Enfin, dans le cas général où les coordonnées varient toutes les deux : (r,θ) devient $(r + dr, \theta + d\theta)$; il suffit de sommer les deux vecteurs \vec{dl} trouvés précédemment.

→10



Remarque : On voit sur le schéma ci-dessus qu'on aurait pu donner l'expression $\vec{dl} = dr\vec{e}_r + (r + dr)d\theta\vec{e}_\theta$.

Mais ceci s'écrit en développant $\vec{dl} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dr d\theta\vec{e}_\theta$, et le terme en $dr d\theta$ est un infiniment petit d'ordre 2, qui est négligeable devant les autres. On trouve donc bien la même chose.

Vecteur vitesse

↪₁₁ À partir de l'expression du déplacement élémentaire ci-dessus et de la définition de la vitesse instantanée, retrouver l'expression de \vec{v} en coordonnées polaires.

4 – Cas du mouvement circulaire

a/ Définitions

Définitions

- ▶ Mouvement circulaire : mouvement pour lequel la trajectoire décrit un cercle.

→ Pour étudier ce type de mouvement, il est judicieux de choisir un repère polaire dont le centre O est le centre du cercle.

→ La coordonnée radiale $r(t)$ est alors constante, égale au rayon R du cercle : $r(t) = R$.

Vitesse angulaire

On définit la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ (unité SI : rad/s).

On la note souvent ω . On a donc $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$.

Remarque : si $\omega = \dot{\theta} > 0$, alors le point M tourne dans le sens direct autour de O (θ croissant) ;
et si $\omega = \dot{\theta} < 0$, alors le point M tourne dans le sens indirect autour de O (θ décroissant).

Uniforme ou non uniforme

- ▶ Mouvement circulaire uniforme : la norme $\|\vec{v}\|$ du vecteur vitesse est constante.
De façon équivalente, la vitesse angulaire ω est constante.
- ▶ Mouvement circulaire non uniforme : la norme du vecteur vitesse peut varier.

b/ Cas uniforme

↪₁₂ Dans le cas du mouvement circulaire *uniforme*, le vecteur vitesse est-il constant ? Le vecteur accélération est-il nul ?

↪₁₃ Étude du mouvement circulaire uniforme : faire l'**EC3**.

- On remarque que le vecteur accélération pointe vers le centre du cercle. Sa norme est proportionnelle à la vitesse au carré, et inversement proportionnelle au rayon de la trajectoire.

c/ Cas non uniforme

Dans ce cas, la coordonnée $r(t) = R$ reste constante, mais la vitesse angulaire peut varier dans le temps :

$$\omega(t) = \dot{\theta} \neq \text{cst} \quad \text{donc} \quad \ddot{\theta} \neq 0.$$

↪₁₄ Reprendre l'**EC3** mais dans le cas d'un mouvement circulaire non uniforme. On posera $v = R\dot{\theta}$. On exprimera le vecteur accélération en fonction de v et R .

5 – Base de Frenet

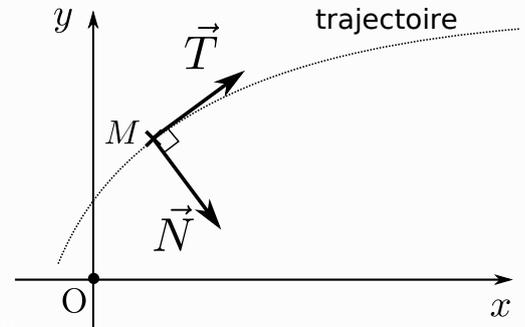
Définition de la base de Frenet

Il s'agit d'une base locale, avec deux vecteurs unitaires (de norme 1).
Au point M de la trajectoire :

- ▶ le vecteur \vec{T} est tangent à la trajectoire, dans le sens de \vec{v} ;
- ▶ le vecteur \vec{N} est orthogonal à la trajectoire, orienté vers l'intérieur de la courbe.

On a les **propriétés** suivantes :

- ▶ $\vec{v} = \|\vec{v}\| \vec{T}$
- ▶ $\vec{a} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} \vec{T} + \frac{\|\vec{v}\|^2}{R(t)} \vec{N}$ avec $R(t)$ le rayon de courbure de la trajectoire au point considéré (c'est le rayon du cercle qui épouse au mieux la trajectoire).



L'expression de \vec{a} ci-dessus est admise. On voit qu'elle est identique à celle pour le mouvement circulaire (uniforme ou non), et elle le généralise en quelque sorte.

Propriétés cinématiques générales

- ▶ Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.
- ▶ Si la trajectoire est courbe, alors le vecteur accélération est dirigé du côté de la concavité de la trajectoire.

II – Coordonnées cylindriques

1 – Description des coordonnées

Les coordonnées cylindriques sont une généralisation à 3D des coordonnées polaires. Elles étendent ces dernières à une troisième dimension : la hauteur selon un axe z .

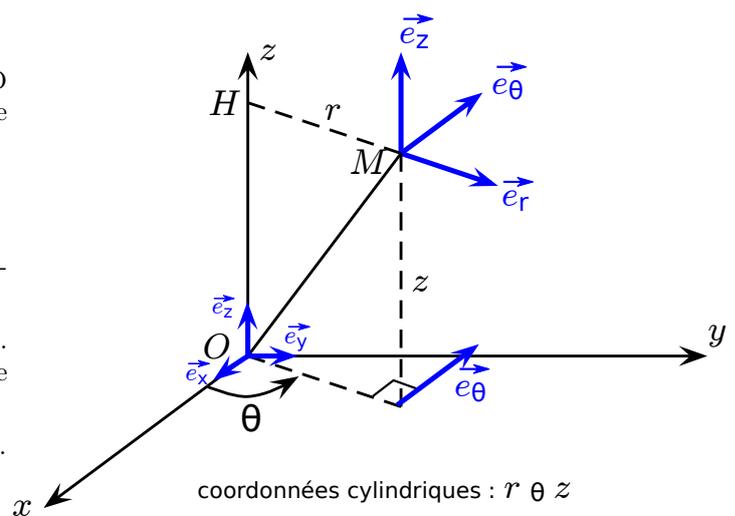
Repérage et définitions :

- ▶ Un point M est repéré par trois coordonnées : les distances r et z , et l'angle θ .

r et θ ont les mêmes rôles qu'en coordonnées polaires.
 $r = HM$ est la distance à l'axe Oz , et θ est l'angle entre HM et l'axe des x .

z est la hauteur du point M par rapport au plan xOy .

- ▶ $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$.
- ▶ Au point M on construit un repère orthonormé direct $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$.



~15 Quelle est l'expression du vecteur position \vec{OM} en fonction des coordonnées cylindriques et des vecteurs de la base cylindriques ?

2 – Vecteurs position, vitesse et accélération

Dérivée des vecteurs de la base

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta, \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r, \quad \frac{d\vec{e}_z}{dt} = 0.$$

Il faut connaître par cœur ce résultat.

Démonstration : les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ sont les mêmes qu'en coordonnées polaires, la démonstration est donc la même.

↪ À partir de là, il faut être capable de retrouver les expressions de \vec{v} , \vec{a} .

Bilan en coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \underbrace{r\vec{e}_r}_{\text{idem polaire}} + z\vec{e}_z \\ \vec{v} &= \underbrace{\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta}_{\text{idem polaire}} + \dot{z}\vec{e}_z \\ \vec{a} &= \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta}_{\text{idem polaire}} + \ddot{z}\vec{e}_z \end{aligned}$$

(les expressions de \vec{v} et \vec{a} ne sont pas à connaître par cœur, mais à retrouver rapidement à partir de $\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ que l'on dérive, comme dans l'EC2, avec ici en plus le terme en $z\vec{e}_z$)

3 – Déplacement élémentaire

Les coordonnées du point M sont $r(t)$, $\theta(t)$ et $z(t)$. Le principe est donc le même que pour les coordonnées polaires, mais on ajoute en plus une possibilité de modifier la coordonnée z .

- Si la coordonnée r passe de r à $r + dr$, et la coordonnée θ passe de θ à $\theta + d\theta$, alors on a le même cas qu'en polaires : $d\vec{l} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta$.
- Puis on suppose que seule la coordonnée z varie : elle passe de z à $z + dz$. On a alors : $d\vec{l} = dz\vec{e}_z$.

→ Dans le cas général où les coordonnées varient toutes les trois : (r, θ, z) devient $(r + dr, \theta + d\theta, z + dz)$ on a : $d\vec{l} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$.

III – Coordonnées sphériques

1 – Description des coordonnées

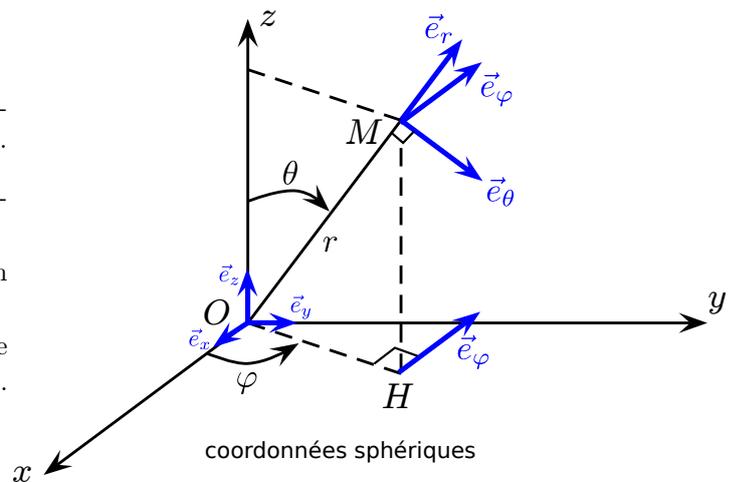
Les coordonnées sphériques sont appropriées pour le description d'un problème possédant certaines symétries sphériques.

- Un point M est repéré par trois coordonnées : la distance r , et les deux angles θ et φ .

Attention : r , θ , \vec{e}_r et \vec{e}_θ ne sont pas les mêmes qu'en coordonnées cylindriques ou polaires.

Ici $r = OM$ est la distance à l'origine, θ est l'angle entre \vec{OM} et l'axe Oz , et φ est l'angle entre \vec{OH} et l'axe Ox .

- $r \geq 0$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.
- Au point M on construit un repère orthonormé direct \vec{e}_r , \vec{e}_θ , \vec{e}_φ .



↪₁₆ Quelle est l'expression du vecteur position \vec{OM} en fonction des coordonnées sphériques et des vecteurs de la base sphérique ?

2 – Vecteurs position, vitesse et accélération

Dérivée des vecteurs de la base : attention, comme les vecteurs ne sont pas les mêmes qu'en coordonnées cylindriques, on n'a pas les résultats précédents. Ainsi, $\frac{d\vec{e}_r}{dt} \neq \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \neq -\dot{\theta}\vec{e}_r$.

Les expressions de ces dérivées étant un peu complexes, on passe plutôt par le calcul du déplacement élémentaire.

Remarque : On peut montrer par projections que l'on a : $\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y)$, $\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_z + \cos \theta (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y)$, $\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y$.

3 – Déplacement élémentaire

À partir de l'expression du déplacement élémentaire et de la définition de la vitesse instantanée, on obtient l'expression de \vec{v} en coordonnées sphériques (pas à connaître) :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + r \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi$$

IV – Application : le pendule simple

Pour finir, nous nous intéressons à un problème de dynamique (étude d'un mouvement incluant l'influence des forces sur la trajectoire) qui se traite facilement en coordonnées polaires.

→₁₇ Faire l'**EC4** sur le pendule simple.