Partie V : Étude des systèmes linéaires
Chapitre 2

DM 10 – Circuit LC, étude énergétique

I Circuit LC et étude énergétique

1 - $\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L = \dfrac{1}{2}Li^2(t) + \dfrac{1}{2}Cu_C^2(t)$.

Or $u_C = u$ (loi des mailles) et $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ (loi bobine), donc $u_C = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

On a donc $\boxed{\mathcal{E}_{\text{tot}} = \dfrac{1}{2}Li^2(t) + \dfrac{1}{2}C\left(L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)^2.}$

On peut dériver ceci, ce qui sera utile pour la suite :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{2}L \times 2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\, i \;+\; \frac{1}{2}CL^2 \times 2\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\left(Li + CL^2\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}\right).\end{aligned}$$

2 - Il n'y a aucune résistance dans ce circuit idéal, donc l'énergie ne sera pas dissipée mais conservée. On a donc $\mathcal{E}_{\text{tot}}(t) = \text{cst}$, d'où $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = 0$.

Avec l'expression précédente on en déduit que $Li + CL^2\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = 0$, soit donc que $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{LC}i = 0.}$

On peut retrouver cette équation par application des lois de Kirchhoff de la façon suivante :

– Notons i_C le courant passant dans le condensateur, orienté tel que la loi des nœuds s'écrive $\eta(t) = i_C(t) + i(t)$.

– Or $\eta(t) = 0$ pour $t > 0$, on a donc $i_C(t) + i(t) = 0$.

– Or $i_C = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, et $u_C = u$, donc $i_C = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

– Or $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, donc $i_C = C\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right) = LC\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}$.

– Finalement on a donc $i_C(t) + i(t) = 0$ qui devient $LC\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + i = 0$, ce qui est bien ce qu'on avait obtenu.

3 - ⋆ Il faut d'abord établir établir ce que valent les grandeurs pour $t < 0$ en régime permanent.

On remplace le condensateur par un interrupteur ouvert et la bobine par un fil.

On a alors $i_c = 0$ donc $i = \eta = I_0$.

Et $u_C = u = 0$ (car la bobine est un fil, donc $u = 0$).

On en déduit donc que $\boxed{u_C(0^-) = 0}$ et $\boxed{i(0^-) = I_0.}$

⋆ Pour $i(t)$: on utilise la continuité du courant à travers une bobine : $\boxed{i(0^+) = i(0^-) = I_0}$.

$\star$ Pour $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$: la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur indique que $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$.

Or $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{u}{L} = \dfrac{u_C}{L}$, pris à 0^+ ceci donne donc $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{u_C(0^+)}{L} = 0.}$

4 - $\star$ $i(t)$ suit une équation différentielle harmonique : $\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 i(t) = 0$ avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

La solution particulière est nulle. La solution est donc identique à celle de l'équation homogène, à savoir : $i(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.

$\star$ Condition initiale 1 : $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$.

Or $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$ donc $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = B\omega_0$.

D'où $B = 0$.

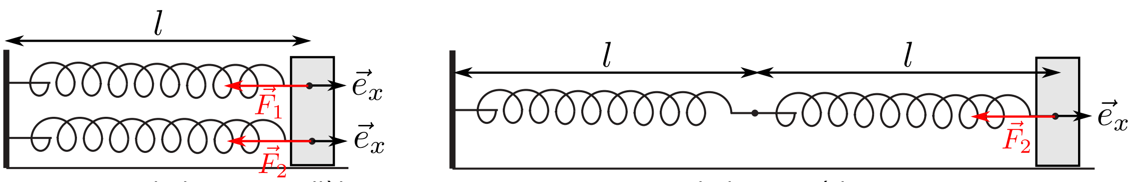
$\star$ Condition initiale 2 : $i(0^+) = I_0$.

Or $i(0) = A$.

D'où $A = I_0$.

$\star$ Finalement, $\boxed{i(t) = I_0 \cos\omega_0 t.}$

II Association de ressorts



association en parallèle   association en série

Association de deux ressorts en parallèle

1 - Au repos, la longueur de l'ensemble est égale à la longueur à vide d'un seul ressort, donc $\boxed{l_0' = l_0.}$

La force totale exercée sur la masse est $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -k(l - l_0)\vec{e}_x - k(l - l_0)\vec{e}_x$.

On a donc $\vec{F} = -2k(l - l_0)\vec{e}_x$, ce qui indique que les deux ressorts agissent comme un seul ressort de raideur $\boxed{k' = 2k.}$

Association de deux ressorts en série

2 - Au repos, la longueur de l'ensemble est égale à la longueur à vide des deux ressorts bout à bout, donc $\boxed{l_0' = 2l_0.}$

Les ressorts étant les mêmes, leur allongement sera identique : $l_1 = l_2$, que l'on peut noter l. La longueur totale est donc $l' = 2l$.

La force $\vec{F}$ exercée sur la masse est due au second ressort, pour lequel on peut écrire :

$$\vec{F} = -k(l_2 - l_0)\vec{e}_x.$$

On remplace $l_2 = l$ par $l'/2$ et l_0 par $l_0'/2$, et on obtient $\vec{F} = -\dfrac{k}{2}(l' - l_0')\vec{e}_x$.

Les deux ressorts agissent donc comme un seul ressort de raideur $\boxed{k' = k/2.}$