Fiche méthode
Mathématiques

Nombres complexes

On note a et b des réels, $\underline{z}$, $\underline{z}_1$ et $\underline{z}_2$ des complexes.

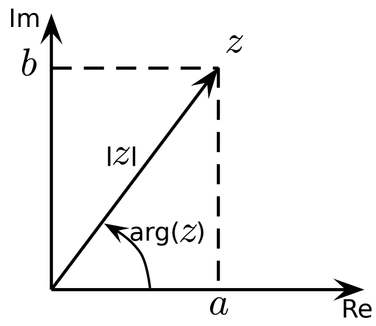
Partie réelle et imaginaire

Soit $\underline{z} = a + \mathrm{j}b$.
On a $\mathrm{Re}(\underline{z}) = a$, et $\mathrm{Im}(\underline{z}) = b$.

Interprétation géométrique

Soit $\underline{z} = a + \mathrm{j}b$.
On se place dans le plan complexe. On peut associer au nombre complexe $\underline{z}$ un vecteur, dont :

- a et b sont les coordonnées cartésiennes,
- $|\underline{z}|$ est la norme,
- $\arg(\underline{z})$ est l'angle entre l'axe des abscisses et le vecteur représentant $\underline{z}$.



On voit sur le dessin qu'on a les valeurs particulières suivantes :

$$\boxed{\arg(1) = 0,\ \ \arg(-1) = \pi,\ \ \arg(\mathrm{j}) = \pi/2,\ \ \arg(-\mathrm{j}) = -\pi/2.}$$

Module

• Propriétés :

$$\boxed{|\underline{z}_1\,\underline{z}_2| = |\underline{z}_1| \times |\underline{z}_2|, \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right| = \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|}.}$$

• Calcul : pour $\underline{z} = a + \mathrm{j}b$ on a

$$\boxed{|a + \mathrm{j}b| = \sqrt{a^2 + b^2}.}$$

Argument

• Propriétés :

$$\boxed{\arg(\underline{z}_1\,\underline{z}_2) = \arg(\underline{z}_1) + \arg(\underline{z}_2), \qquad \text{et} \qquad \arg(\underline{z}_1/\underline{z}_2) = \arg(\underline{z}_1) - \arg(\underline{z}_2).}$$

• Calcul : On a, <u>à condition que $a > 0$</u> :

$$\boxed{\arg(a + \mathrm{j}b) = \arctan\frac{b}{a}.}$$

En physique on a quasiment toujours $a > 0$ et il suffit de retenir la formule ci-dessus. Cela dit, si jamais $a < 0$, on écrit :

$$\begin{aligned}
\arg(a + \mathrm{j}b) &= \arg[(-1)(-a - \mathrm{j}b)] \\
&= \arg(-1) + \arg(-a - \mathrm{j}b) \\
&= \pi + \arctan\frac{-b}{-a} \qquad \text{car } \arg(-1) = \pi \\
&= \pi + \arctan\frac{b}{a}
\end{aligned}$$

• Valeurs particulières : si $a>0$ est un réel positif, on a

$$\boxed{\begin{aligned}\arg(a)&=0\\ \arg(-a)&=\pi\\ \arg(a\mathrm{j})&=\frac{\pi}{2}\\ \arg(-a\mathrm{j})&=-\frac{\pi}{2}\end{aligned}}$$

Exponentielle complexe

• Exponentielle d'un imaginaire pur : soit Φ un réel, on a

$$\boxed{e^{\mathrm{j}\Phi}=\cos(\Phi)+\mathrm{j}\sin(\Phi).}$$

D'où :

$$\boxed{\mathrm{Re}\left(e^{\mathrm{j}\Phi}\right)=\cos(\Phi)\quad\text{ et }\quad\mathrm{Im}\left(e^{\mathrm{j}\Phi}\right)=\sin\Phi.}$$

On a aussi

$$\boxed{\left|e^{\mathrm{j}\Phi}\right|=1.}$$

• Si $\underline{z}=Xe^{\mathrm{j}\Phi}$ avec $X>0$ réel, alors $\boxed{\left|Xe^{\mathrm{j}\Phi}\right|=X \text{ et } \arg(Xe^{\mathrm{j}\Phi})=\Phi.}$

• On peut écrire :

$$\underline{z}=|\underline{z}|\,e^{\mathrm{j}\arg(\underline{z})}.$$

• On a : $\cos x=\dfrac{e^{\mathrm{j}x}+e^{-\mathrm{j}x}}{2}$ et $\sin x=\dfrac{e^{\mathrm{j}x}-e^{-\mathrm{j}x}}{2\mathrm{j}}$, ce qui peut être utile si l'on a oublié ses formules trigonométriques.

Exercices pour s'entraîner

Pour chacune de ces fonctions de transfert, calculer le module et l'argument. α, τ et H_0 sont des réels strictement positifs.

$$1\text{– }\ \underline{H}=\frac{-\alpha}{1+\mathrm{j}\tau\omega},\quad 2\text{– }\ \underline{H}=\frac{1}{\mathrm{j}\tau\omega},\quad 3\text{– }\ \underline{H}=H_0\,\frac{\mathrm{j}\tau\omega-1}{\mathrm{j}\tau\omega+1}.$$

Donner la partie réelle des nombres complexes suivants. A et φ sont des réels.

$$4\text{– }\ \underline{z}=A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)},\quad 5\text{– }\ \underline{z}=A\,\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)},$$

Réponses :

$$1\text{– }\ |\underline{H}|=\frac{|\alpha|}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}},\quad \arg(\underline{H})=\pi-\arctan(\tau\omega).$$

$$2\text{– }\ |\underline{H}|=\frac{1}{|\tau\omega|},\quad \arg(\underline{H})=-\frac{\pi}{2}.$$

$$3\text{– }\ |\underline{H}|=|H_0|,\quad \arg(\underline{H})=\pi-2\arctan(\tau\omega).$$

$$4\text{– }\ \mathrm{Re}(\underline{z})=A\,\cos(\omega t+\varphi),$$

5– On écrit $\mathrm{j}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}$, donc $\underline{z}=A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi+\pi/2)}$, d'où $\mathrm{Re}(\underline{z})=A\,\cos(\omega t+\varphi+\pi/2)$.