**Partie VI : Mécanique**
**Chapitre 1**

**Correction – DM 7 – Chute avec frottements et résolution numérique**

# I Chute libre d'un parachutiste

**1 -** ⋆ Schéma obligatoire. ⋆ Système : {Luke}, référentiel terrestre supposé galiléen.

⋆ Bilan des forces :

- le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_z$ ;
- la force de frottement $\vec{f} = -kv^2\vec{e}_z$ (elle est dirigée selon $-\vec{e}_z$ car la chute est purement verticale et vers le bas).

⋆ Principe fondamental de la dynamique : $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{P} + \vec{f}$.

Or ici $\vec{v} = v\vec{e}_z$, donc on obtient : $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z = mg\vec{e}_z - kv^2\vec{e}_z$.

⋆ Projection sur $\vec{e}_z$ : $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv^2$. Soit donc : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{k}{m}v^2 = g.}$

**2 -** La vitesse limite $v_l$ est atteinte lorsque la force de frottement finit par compenser le poids. Mathématiquement, $v_l = \text{cst}$, donc dans l'équation du mouvement $\dfrac{\mathrm{d}v_l}{\mathrm{d}t} = 0$, et il reste donc $0 + \dfrac{k}{m}v_l^2 = g$, d'où $\boxed{v_l = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}.}$

**3 -** On inverse la relation précédente pour isoler $k$ : $\boxed{k = \dfrac{mg}{v_l^2} = 0{,}35\,\mathrm{kg\,m^{-1}}.}$

**4 -** L'équation différentielle précédente n'est pas linéaire à cause du terme en $v^2$. Elle n'est donc pas simple à résoudre.

**5 -** On lit sur le graphique qu'il faut $\underline{10\,\mathrm{s}}$ pour atteindre 95% de la vitesse limite. Ceci a lieu au bout d'une hauteur de chute de $\underline{350\,\mathrm{m}}$ environ. C'est donc assez rapide et la plus grande partie du saut a lieu à la vitesse limite.

**Attention :** la méthode avec $3\tau$ ne marche que si la solution est en $\mathrm{e}^{-t/\tau}$, ce qui n'est pas le cas ici (l'équation est non linéaire et on ne connait pas la forme de la solution).

# II Résolution de problème : vitesse de course avant un saut

Nous avons vu que la portée d'un "tir" est $d = \dfrac{v_0^2}{g}$ (exercice II du TD).
Nous plaçons donc dans les hypothèses où ceci est valide : le saut est sans frottement et dans un champ de pesanteur $g$, avec une vitesse initiale $v_0$.
Il faut estimer la distance du saut. En supposant que l'homme debout à droite mesure 1 m 90, on obtient une portée de 13,9 m.
On a donc

$$\boxed{v_0 = \sqrt{gd} = 11{,}7\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 42\,\mathrm{km\,h^{-1}}.}$$

En comparaison, le record du monde de course sur 100 m en 9,58 s implique une vitesse moyenne de 37 km/h. Record battu sur cette affiche ?

**Partie VI : Mécanique**
**Chapitre 1**

**Correction – DM 7 – Chute avec frottements et résolution numérique**

# I Chute libre d'un parachutiste

**1 -** ⋆ Schéma obligatoire. ⋆ Système : {Luke}, référentiel terrestre supposé galiléen.

⋆ Bilan des forces :

- le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_z$ ;
- la force de frottement $\vec{f} = -kv^2\vec{e}_z$ (elle est dirigée selon $-\vec{e}_z$ car la chute est purement verticale et vers le bas).

⋆ Principe fondamental de la dynamique : $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{P} + \vec{f}$.

Or ici $\vec{v} = v\vec{e}_z$, donc on obtient : $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z = mg\vec{e}_z - kv^2\vec{e}_z$.

⋆ Projection sur $\vec{e}_z$ : $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv^2$. Soit donc : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{k}{m}v^2 = g.}$

**2 -** La vitesse limite $v_l$ est atteinte lorsque la force de frottement finit par compenser le poids. Mathématiquement, $v_l = \text{cst}$, donc dans l'équation du mouvement $\dfrac{\mathrm{d}v_l}{\mathrm{d}t} = 0$, et il reste donc $0 + \dfrac{k}{m}v_l^2 = g$, d'où $\boxed{v_l = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}.}$

**3 -** On inverse la relation précédente pour isoler $k$ : $\boxed{k = \dfrac{mg}{v_l^2} = 0{,}35\,\mathrm{kg\,m^{-1}}.}$

**4 -** L'équation différentielle précédente n'est pas linéaire à cause du terme en $v^2$. Elle n'est donc pas simple à résoudre.

**5 -** On lit sur le graphique qu'il faut <u>10 s</u> pour atteindre 95% de la vitesse limite. Ceci a lieu au bout d'une hauteur de chute de <u>350 m</u> environ. C'est donc assez rapide et la plus grande partie du saut a lieu à la vitesse limite.

**Attention :** la méthode avec $3\tau$ ne marche que si la solution est en $\mathrm{e}^{-t/\tau}$, ce qui n'est pas le cas ici (l'équation est non linéaire et on ne connait pas la forme de la solution).

# II Résolution de problème : vitesse de course avant un saut

Nous avons vu que la portée d'un "tir" est $d = \dfrac{v_0^2}{g}$ (exercice II du TD).
Nous plaçons donc dans les hypothèses où ceci est valide : le saut est sans frottement et dans un champ de pesanteur $g$, avec une vitesse initiale $v_0$.
Il faut estimer la distance du saut. En supposant que l'homme debout à droite mesure 1 m 90, on obtient une portée de 13,9 m.
On a donc

$$\boxed{v_0 = \sqrt{gd} = 11{,}7\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 42\,\mathrm{km\,h^{-1}}.}$$

En comparaison, le record du monde de course sur 100 m en 9,58 s implique une vitesse moyenne de 37 km/h. Record battu sur cette affiche ?