

# Équations différentielles d'ordre 1 et 2

Cette fiche aborde uniquement les équations différentielles *linéaires à coefficients constants* d'ordre 1 et 2. C'est souvent ce type d'équations que vous rencontrerez en physique-chimie en CPGE.

Attention toutefois, en mathématiques vous manipulerez régulièrement des équations non linéaires (par exemple  $y^2 + y = 0$ ) ou à coefficients non constants (par exemple  $y'(t) + ty(t) = 0$ ), et les résultats présentés ici ne s'appliquent pas.

## I Résolution de $y' + y/\tau = b$

### a/ Ce qu'il faut connaître

Équation	Solution
<p>Équation homogène :</p> $\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = 0$	$u(t) = A e^{-t/\tau}$ <p><math>A</math> est une constante réelle, qui peut être obtenue avec la condition initiale <math>u(t = 0)</math>.</p>
<p>Équation avec second membre constant :</p> $\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = \frac{E}{\tau}$	$u(t) = u_H(t) + u_P(t),$ avec : <ul style="list-style-type: none"> <li>▶ <math>u_H(t) = A e^{-t/\tau}</math> solution de l'équation homogène,</li> <li>▶ <math>u_P = E</math> solution particulière de l'équation.</li> </ul> <p>Attention : la constante <math>A</math> se détermine avec la solution totale <math>u(t = 0) = A + u_P(t = 0)</math>, et certainement pas avec <math>u_H(t = 0)</math>.</p> <p>Rq : si le second membre est sinusoïdal, du type <math>\alpha \cos \omega t</math>, alors la solution particulière est celle du régime sinusoïdal forcé (étude en complexes).</p>

Voir ce site pour un tableau un peu plus complet, et surtout pour les liens vers des animations de systèmes vérifiant ces équations (charge et décharge de condensateur, etc.) : [http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve\\_tulloue/equadiff/equadif/ordre1.php](http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/equadiff/equadif/ordre1.php) (le lien est aussi sur le site de la classe, rubrique "TP, DS, maths...").

## b/ Exercices pour s'entraîner

↪ Dans les exemples ci-dessous, écrire la forme générale des solutions.

a.  $f'(x) + af(x) = 0$  avec  $a$  constant.

b.  $\dot{u} + \frac{u(t)}{\tau} = 0$  avec  $\tau$  constant.

c.  $\dot{u} + \frac{u(t)}{\tau} = \frac{E}{\tau}$  avec  $E$  et  $\tau$  constants.

d.  $\frac{di}{dt} = \alpha i(t) + \beta$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  constants.

e.  $\frac{dT}{ds} = \frac{T(s)}{c_p}$  avec  $c_p$  constant.

**Réponses :**

a.  $f(x) = C \exp(-ax)$     b.  $u(t) = C \exp(-t/\tau)$     c.  $u(t) = C \exp(-t/\tau) + E$

d.  $i(t) = C \exp(\alpha t) - \beta/\alpha$     e.  $T(s) = C \exp(s/c_p)$

## II Résolution de $y'' + (\omega_0/Q)y' + \omega_0^2 y = c$ \_\_\_\_\_

### a/ Ce qu'il faut connaître

**Remarque :** les équations du second ordre font intervenir deux constantes d'intégration. Il faut donc deux conditions initiales pour les déterminer, en générale une sur  $u(t = 0)$  et une sur  $u'(t = 0)$ .

Sur le même site que précédemment, mais pour les systèmes du 2<sup>e</sup> ordre : [http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve\\_tulloue/equadiff/equadif/ordre2.php](http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/equadiff/equadif/ordre2.php) (le lien est aussi sur le site de la classe, rubrique "TP, DS, maths...").

Équation	Solution
<p>Équation de type oscillateur harmonique (donc sans frottement), homogène :</p> $\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0$	$u(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t),$ <p>Détermination de <math>A</math> et <math>B</math> :</p> <p>Supposons que l'on connaisse <math>u(t = 0) = u_0</math> et <math>u'(t = 0) = u_1</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- On a alors <math>u_0 = u(t = 0) = A</math>,</li> <li>- Pour <math>u'(t = 0)</math> il faut d'abord calculer <math>u'(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)</math>, puis prendre la valeur à <math>t = 0</math> : <math>u'(t = 0) = B\omega_0</math>. On a donc <math>u_1 = B\omega_0</math> et donc <math>B = u_1/\omega_0</math>.</li> </ul> <p>Rq : on peut aussi avoir la solution sous la forme <math>u(t) = A' \cos(\omega_0 t + \varphi)</math>, avec <math>A'</math> et <math>\varphi</math> des constantes à déterminer (même méthode).</p>
<p>Équation de type oscillateur harmonique (donc sans frottement), avec second membre :</p> $\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = \alpha$	$u(t) = u_H(t) + u_P(t),$ avec : <ul style="list-style-type: none"> <li>▶ <math>u_H(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)</math> solution de l'équation homogène,</li> <li>▶ <math>u_P = \alpha/\omega_0^2</math> solution particulière de l'équation.</li> </ul>

**Remarque :** Ici comme dans les autres cas, l'expression de la solution particulière n'est pas à connaître. Il faut la trouver en supposant qu'elle est constante : dans ce cas, tous les termes en dérivée de  $u$  sont nuls, et on isole simplement  $u$ .

Ici ceci donne :

$$0 + \omega_0^2 u_P = \alpha \quad \text{d'où} \quad u_P = \alpha/\omega_0^2.$$

**Autre remarque :** on peut voir que les formes  $u_H(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$  et  $u_H(t) = A' \cos(\omega_0 t + \varphi)$  sont équivalentes en développant cette dernière :

$$u_H(t) = A' \cos(\omega_0 t + \varphi) = A' (\cos \omega_0 t \cos \varphi - \sin \omega_0 t \sin \varphi) = \underbrace{A' \cos \varphi}_{=A} \cos \omega_0 t - \underbrace{A' \sin \varphi}_{=B} \sin \omega_0 t.$$

Équation	Solution
<p>Équation avec dissipation (terme <math>du/dt</math>), homogène :</p> $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$ <p>ou avec les notations de la SI :</p> $\frac{d^2u}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$ <p>(donc <math>\xi = 1/(2Q)</math>)</p>	<p>Équation caractéristique : <math>r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0</math>,</p> <p>de discriminant <math>\Delta = 4\omega_0^2 \left( \frac{1}{4Q^2} - 1 \right) = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1)</math>.</p> <p>Solution :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▶ Si <math>Q &lt; 1/2</math> (soit <math>\xi &gt; 1</math>) : <u>régime apériodique</u>. Les racines <math>r_1</math> et <math>r_2</math> du polynôme sont réelles et s'écrivent <math>-\frac{\omega_0}{2Q} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2} \right)</math>. On a <math>u(t) = A \exp(r_1 t) + B \exp(r_2 t)</math>.</li> <li>▶ Si <math>Q = 1/2</math> (soit <math>\xi = 1</math>) : <u>régime critique</u>. <math>\Delta = 0</math> et une seule racine (double) <math>r_1 = -\omega_0</math>. On a <math>u(t) = (At + B) \exp(-\omega_0 t)</math>.</li> <li>▶ Si <math>Q &gt; 1/2</math> (soit <math>\xi &lt; 1</math>) : <u>régime pseudo-périodique</u>. Les racines <math>r_1</math> et <math>r_2</math> du polynôme sont complexes conjugués, <math>r_1 = -\mu + j\Omega</math> et <math>r_2 = -\mu - j\Omega</math> avec <math>\mu = \frac{\omega_0}{2Q}</math> et <math>\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}</math>. On a <math>u(t) = \exp(-\mu t) [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]</math>.</li> </ul> <p>Rq 1 : <math>Q</math> donne une idée du nombre d'oscillations dans le régime pseudo-périodique (donc de la durée du transitoire, qui est <math>Q \times T_0</math>).</p> <p>Rq 2 : Pour le régime pseudo-périodique, on peut aussi écrire la solution sous la forme <math>u(t) = \exp(-\mu t) A' \cos(\omega t + \varphi)</math>.</p>
<p>Équation avec frottement et avec second membre constant :</p> $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \alpha$ <p>ou</p> $\frac{d^2u}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \alpha$	<p><math>u(t) = u_H(t) + u_P(t)</math>, avec :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▶ <math>u_H(t)</math> solution de l'équation homogène (voir au dessus),</li> <li>▶ <math>u_P = \alpha/\omega_0^2</math> solution particulière de l'équation.</li> </ul> <p>Rq : si le second membre est sinusoïdal, du type <math>\alpha \cos \omega t</math>, alors la solution particulière est celle du régime sinusoïdal forcé (étude en complexes, chapitre 4).</p>

## b/ Exercices pour s'entraîner

↪<sub>2</sub> L'équation différentielle régissant les oscillations d'une masse accrochée à un ressort est  $m\ddot{x} = -kx$ ,  $k > 0$ . Écrire les solutions de cette équation, sachant qu'à  $t = 0$  on a  $x = x_0$  et une vitesse nulle.

↪<sub>3</sub> On considère maintenant que la masse oscille dans un milieu où les frottements ne peuvent plus être négligés. On a donc  $m\ddot{x} = -kx - f\dot{x}$  avec  $k, f > 0$ . Donner l'expression de  $f$  à partir de laquelle il n'y aura plus du tout d'oscillations.