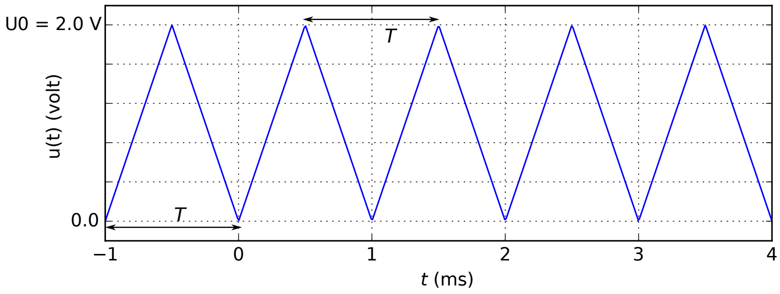
Partie I : Signaux et ondes
Chapitre 1

Correction – DM 1 – Étude d'un signal triangle

1 - Tracé ci-dessous :



2 - La fréquence est $\boxed{f = \dfrac{1}{T} = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{Hz} = 1{,}0\,\mathrm{kHz}.}$

La pulsation est $\boxed{\omega = 2\pi f = 6{,}3 \times 10^3\,\mathrm{rad/s}.}$

L'amplitude crête à crête est $\boxed{U_{\text{cr-cr}} = 2{,}0\,\mathrm{V}.}$

3 - Le signal est symétrique par rapport à 1 V, donc sa valeur moyenne sera de 1 V.

Confirmons ceci en calculant $\langle u(t) \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle u(t) \rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} u(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} u(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} 2U_0\frac{t}{T}\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T}\left(2U_0 - 2U_0\frac{t}{T}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} 2U_0\frac{t}{T}\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} 2U_0\mathrm{d}t - \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} 2U_0\frac{t}{T}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Il y a trois intégrales. Calculons les séparément :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^{T/2} 2U_0\frac{t}{T}\mathrm{d}t &= \frac{1}{T}\frac{2U_0}{T}\int_0^{T/2} t\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\frac{2U_0}{T}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{T/2} \\
&= \frac{1}{T}\frac{2U_0}{T}\left(\frac{T^2}{8} - 0\right) \\
&= \frac{U_0}{4}.
\end{aligned}$$

Puis la seconde :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} 2U_0\mathrm{d}t &= \frac{1}{T}2U_0\int_{T/2}^{T}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}2U_0[t]_{T/2}^{T} \\
&= \frac{1}{T}2U_0(T - T/2) \\
&= \frac{1}{T}2U_0\frac{T}{2} \\
&= U_0
\end{aligned}$$

Et la troisième :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} 2U_0\frac{t}{T}\mathrm{d}t &= \frac{1}{T}\frac{2U_0}{T}\int_{T/2}^{T} t\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\frac{2U_0}{T}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{T/2}^{T} \\
&= \frac{1}{T}\frac{2U_0}{T}\left(\frac{T^2}{2}-\frac{T^2}{8}\right) \\
&= \frac{3U_0}{4}.
\end{aligned}$$

Finalement on somme les trois :

$$\langle u(t)\rangle = \frac{U_0}{4} + U_0 - \frac{3U_0}{4}$$

$$\boxed{\langle u(t)\rangle = \frac{U_0}{2} = 1{,}0\,\mathrm{V}}$$

Remarque : Vu que l'intégrale est l'aire sous la courbe, on pouvait tout de suite écrire que $\int_0^{T/2} u(t)\mathrm{d}t = \int_{T/2}^{T} u(t)\mathrm{d}t$ et simplifier le calcul.

4 - On en déduit la valeur efficace :

$$\begin{aligned}
U_{\text{eff}} &= \sqrt{\langle u(t)^2\rangle} \\
&= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u(t)^2\mathrm{d}t} \\
&= \sqrt{\frac{U_0^2}{3}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{3}}}$$

Complément : Démontrons le résultat admis dans l'énoncé. On commence par calculer :

$$\begin{aligned}
\int_0^{T/2} u(t)^2\mathrm{d}t &= \int_0^{T/2}\left(2U_0\frac{t}{T}\right)^2\mathrm{d}t \\
&= \frac{4U_0^2}{T^2}\int_0^{T/2} t^2\mathrm{d}t \\
&= \frac{4U_0^2}{T^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{T/2} \\
&= \frac{4U_0^2}{T^2}\frac{T^3}{3\times 2^3} \\
&= \frac{U_0^2 T}{6}
\end{aligned}$$

Ensuite, vu que l'intégrale est l'aire sous la courbe et que cette aire va être la même entre 0 et $T/2$ qu'entre $T/2$ et T, on va avoir également $\displaystyle\int_{T/2}^{T} u(t)^2\mathrm{d}t = \frac{U_0^2 T}{6}$.

D'où le résultat annoncé dans l'énoncé en sommant les deux.

5 - Le a/ ne convient pas car la valeur moyenne est égale à 1,0 V, et non pas à 0,5 V comme donné ici par le pic à fréquence nulle.

Le b/ ne convient pas à cause de la fréquence du fondamental qui est de 2 kHz.

Le c/ convient : bonne valeur moyenne, bonne fréquence de 1 kHz du fondamental.

Le d/ ne convient pas car il serait de valeur moyenne nulle.