Partie I : Signaux et ondes
Chapitre 1

CorrectionTD – Signal et spectre

I Vrai-faux/questions courtes [$\bullet\circ\circ$]

1 - $T = 1/f$, $\omega = 2\pi f$. $[T] = \mathrm{s}$, $[f] = \mathrm{s}^{-1}$, $[\omega] = \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

2 - Vrai. La moyenne est une opération linéaire.

3 - Faux.

III Calculs de valeur moyenne $\star$ | [$\bullet\circ\circ$]

Pour chacun des signaux périodiques suivants, donner leur période T, et calculer leur valeur moyenne $\langle s(t)\rangle$.

1 - $s(t) = s_0\cos(\omega t + \varphi)$.

Période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

$$\begin{aligned}
\langle s(t)\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T s_0\cos(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}s_0\int_0^T \cos(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t \\
&= \frac{s_0}{T}\left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)\right]_0^T \\
&= \frac{s_0}{T}\frac{1}{\omega}\left(\sin(\omega T+\varphi)-\sin(\varphi)\right) \\
&= \frac{s_0}{T}\frac{1}{\omega}\left(\sin(2\pi+\varphi)-\sin(\varphi)\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2 - $s(t) = s_0\sin(\omega t + \varphi)$.

Période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

$$\begin{aligned}
\langle s(t)\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T s_0\sin(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t \\
&= \frac{s_0}{T}\int_0^T \sin(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t \\
&= \frac{s_0}{T}\left[-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)\right]_0^T \\
&= -\frac{s_0}{T}\frac{1}{\omega}\left(\cos(\underbrace{\omega T}_{=2\pi}+\varphi)-\cos(\varphi)\right) \\
&= -\frac{s_0}{T}\frac{1}{\omega}\left(\underbrace{\cos(2\pi+\varphi)}_{=\cos\varphi}-\cos(\varphi)\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

3 - $s(t) = 3 + 8\cos(\omega t + \pi/2)$.

Période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

$$
\begin{aligned}
\langle s(t)\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T (3+8\cos(\omega t+\pi/2))\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T 3\mathrm{d}t + \int_0^T 8\cos(\omega t+\pi/2)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T 3\mathrm{d}t + 8\underbrace{\int_0^T \cos(\omega t+\pi/2)\mathrm{d}t}_{=0} \\
&= \frac{1}{T}3T \\
&= 3.
\end{aligned}
$$

4 - $s(t) = s_0\cos^2(\omega t+\varphi)$.

Pour obtenir la période il faut se débarrasser du carré en utilisant la formule

$$
\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1, \quad \text{soit donc} \quad \cos^2 x = \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}.
$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
s(t) &= s_0\frac{\cos[2(\omega t+\varphi)]}{2} + s_0\frac{1}{2}, \\
&= \frac{s_0}{2}\cos[2\omega t+2\varphi] + \frac{s_0}{2},
\end{aligned}
$$

et on voit donc qu'on a un signal harmonique (décalé) de période $T = \dfrac{2\pi}{2\omega} = \dfrac{\pi}{\omega}$.

Calculons ensuite la valeur moyenne :

$$
\begin{aligned}
\langle s(t)\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T s_0\cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{s_0}{2}\cos[2\omega t+2\varphi] + \frac{s_0}{2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{s_0}{2}\cos[2\omega t+2\varphi]\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^T \frac{s_0}{2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\frac{s_0}{2}\int_0^T \cos[2\omega t+2\varphi]\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\frac{s_0}{2}\int_0^T \mathrm{d}t \\
&= \frac{s_0}{2T}\left[\frac{1}{2\omega}\sin[2\omega t+2\varphi]\right]_0^T + \frac{s_0}{2T}(T-0) \\
&= \frac{s_0}{2T}\frac{1}{2\omega}\left(\sin[2\underbrace{\omega T}_{=2\pi}+2\varphi] - \sin(2\varphi)\right) + \frac{s_0 T}{2T} \\
&= \frac{s_0}{2T}\frac{1}{2\omega}\left(\underbrace{\sin[2\times 2\pi+2\varphi]}_{=\sin(2\varphi)} - \sin(2\varphi)\right) + \frac{s_0}{2} \\
&= \frac{s_0}{2}
\end{aligned}
$$

5 - $s(t) = s_0\sin^2(\omega t+\varphi)$.

On utilise cette fois :

$$
\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x, \quad \text{soit donc} \quad \sin^2 x = -\frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}.
$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
s(t) &= -s_0\frac{\cos[2(\omega t+\varphi)]}{2} + s_0\frac{1}{2}, \\
&= -\frac{s_0}{2}\cos[2\omega t+2\varphi] + \frac{s_0}{2},
\end{aligned}
$$

et on voit donc qu'on a un signal harmonique (décalé) de période $T = \dfrac{2\pi}{2\omega} = \dfrac{\pi}{\omega}$.

Pour la valeur moyenne on reprend presque exactement les calculs du 2, à un signe moins près mais sans importante car en facteur du terme nul. On a donc encore $\langle s(t) \rangle = \dfrac{s_0}{2}$.

IV Déphasage ★ | [● ○ ○]

1 - Le signal 2 passe par son maximum avant le signal 1. C'est donc le signal 2 qui est en avance sur le signal 1.

Remarque : On peut aussi vouloir dire que le signal 1 passe par son maximum avant le signal 2. Mais dans ce cas on a un écart de temps plus important que dans le cas où on considère que c'est 2 qui passe avant. Il faut donc retenir le premier cas.

2 - Mesurons d'abord la période : $T = 3\,\mathrm{ms}$.

Pour le déphasage, on ne peut pas raisonner en repérant les passages par 0, car le signal 2 n'est pas de moyenne nulle.

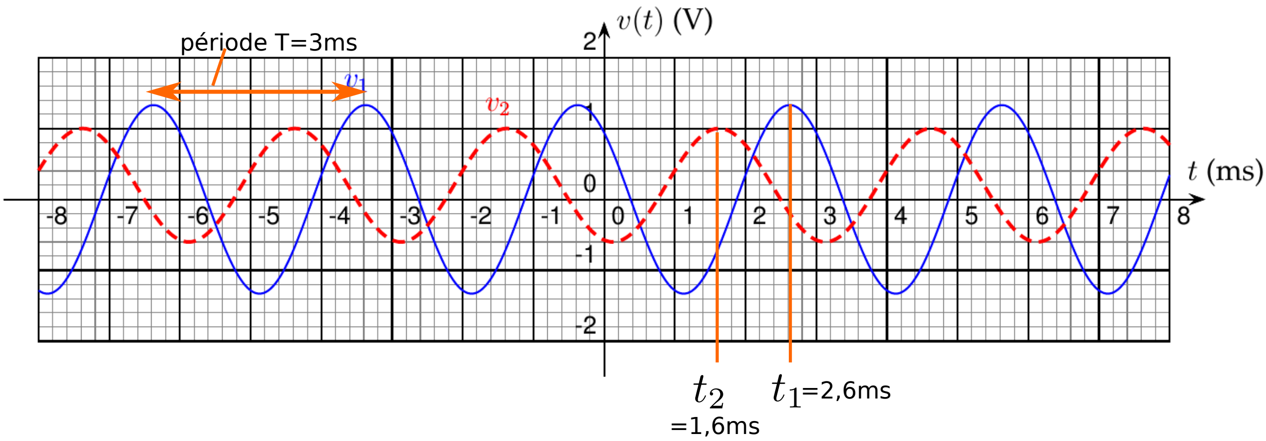
On repère donc plutôt les maximum.

On repère l'instant où v_2 est maximal, on note t_2 cet instant.

On repère l'instant le plus proche où v_1 est maximum, on le note t_1.

On a alors, pour le déphasage de v_2 par rapport à v_1 :

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega(t_1 - t_2) = \frac{2\pi}{3}(2{,}6 - 1{,}6) = 2{,}1\,\mathrm{rad}.$$



V Spectre d'une somme ou d'un produit

1 - a - On a $u_s(t) = U_1 \cos(2\pi f_1 t) + U_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi)$.

Il y a donc deux fréquences dans ce signal : $f_1 = 40\,\mathrm{Hz}$ et $f_2 = 60\,\mathrm{Hz}$. Le spectre comporte donc deux pics.

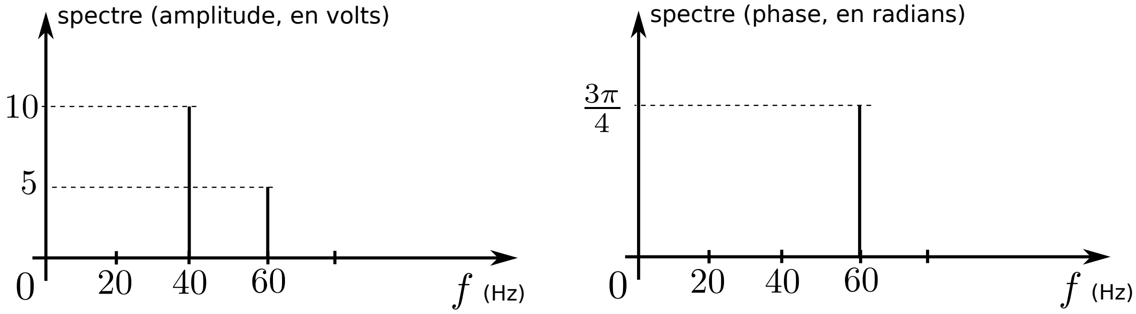
b - Le signal $u_s(t)$ est périodique car son spectre contient des pics uniquement à des fréquences multiples d'une fréquence fondamentale.

Il faut trouver cette fréquence fondamentale : on constante que $f_0 = 20\,\mathrm{Hz}$ convient. Ainsi :

- Le fondamental a $f_0 = 20\,\mathrm{Hz}$ est absent du signal.
- Le premier harmonique est à $f_1 = 2 \times 20 = 40\,\mathrm{Hz}$, il est d'amplitude $10\,\mathrm{V}$ et de phase à l'origine nulle.
- Le second harmonique est à $f_2 = 3 \times 20 = 60\,\mathrm{Hz}$, il est d'amplitude $5\,\mathrm{V}$ et de phase à l'origine $3\pi/4$.

– Il n'y a pas d'autres harmoniques.

Allure du spectre :



2 - a - Il faut mettre le signal sous forme de somme de cosinus afin de pouvoir identifier les fréquences. Donc :

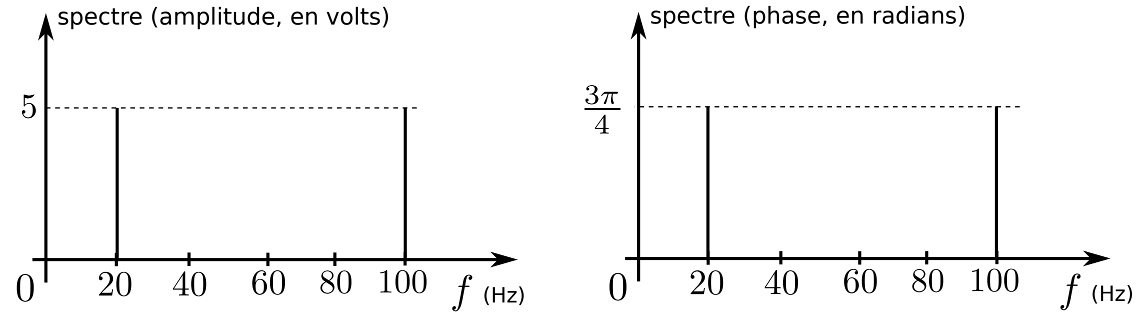
$$\begin{aligned} u_p(t) &= kU_1U_2\,\cos(2\pi f_1 t)\cos(2\pi f_2 t+\varphi) \\ &= \frac{kU_1U_2}{2}\,[\cos(2\pi f_1 t + 2\pi f_2 t + \varphi) + \cos(2\pi f_1 t - 2\pi f_2 t - \varphi)] \\ &= \frac{kU_1U_2}{2}\,[\cos(2\pi(f_1+f_2)t+\varphi) + \cos(2\pi(f_1-f_2)t-\varphi)]\,. \end{aligned}$$

On identifie donc une fréquence à $f_1 + f_2 = 100\,\text{Hz}$, et une à $f_1 - f_2 = -20\,\text{Hz}$. Problème ! une fréquence négative n'existe pas vraiment. On utilise donc le fait que $\cos(x) = \cos(-x)$ pour écrire :

$$u_p(t) = \frac{kU_1U_2}{2}\,[\cos(2\pi(f_1+f_2)t+\varphi) + \cos(2\pi(f_2-f_1)t+\varphi)]\,.$$

Les fréquences sont donc $f_1 + f_2 = 100\,\text{Hz}$, et une à $f_2 - f_1 = 20\,\text{Hz}$.

b - Allure du spectre :



Remarque : Les amplitudes de chaque pic sont bien $kU_1U_2/2 = 5\,\text{V}$.