Révisions

DM 20 – Révisions de mécanique

I Révisions de mécanique : mesure de la pesanteur

Extrait et adapté de CCP TSI 2010.

I.1 Questions introductives

1. **a -** Le moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz) d'un point de masse m distant de r de l'axe (Oz) est $J_{(Oz)} = mr^2$.

Si on note $\mathrm{d}m$ la masse du point, le moment d'inertie associé est $\mathrm{d}J = \mathrm{d}m\, r^2$.

Pour un solide, découpe le solide en élément infinitésimaux de masse $\mathrm{d}m$, et on somme les moments d'inertie :

$$J_{(Oz)} = \int_{M\in\text{solide}} \mathrm{d}J = \int_{M\in\text{solide}} r^2 \mathrm{d}m. \tag{1}$$

L'an dernier vous aviez vu la relation $J_{(Oz)} = \sum_i m_i r_i^2$, mais la définition avec l'intégrale est plus rigoureuse.

Vue la définition, l'unité de $J_{(Oz)}$ est le $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$.

b - Le moment d'inertie est d'autant plus grand que la masse du solide est élevée et qu'elle est répartie loin de l'axe considéré.

Ici on a donc $J_{(Oz),2} < J_{(Oz),1} = J_{(Oz),3} < J_{(Oz),4}$.

2. Pour un solide en rotation autour d'un axe (Oz) fixe à la vitesse angulaire $\dot\theta(t)$, dans un référentiel galiléen, et soumis à des forces $\vec{F_i}$, on a :

$$\boxed{J_{(Oz)}\frac{\mathrm{d}\dot\theta}{\mathrm{d}t} = \sum_i M_{(Oz)}(\vec{F_i}),}$$

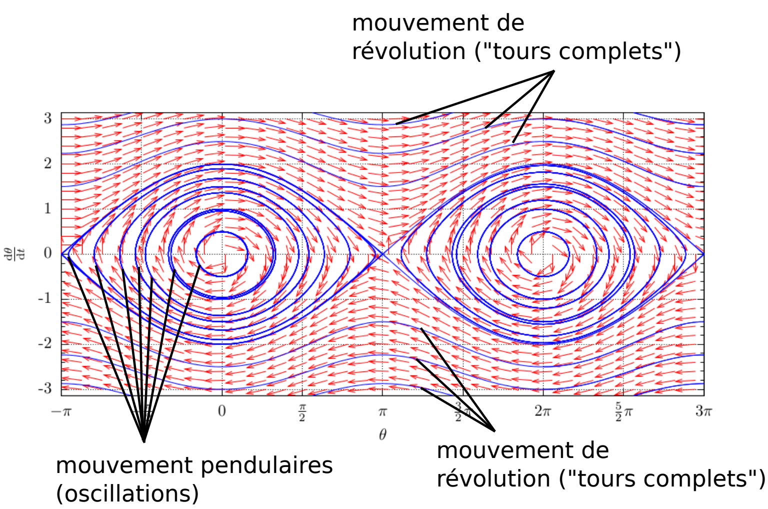
avec $M_{(Oz)}(\vec{F_i})$ le moment de la force $\vec{F_i}$ selon l'axe (Oz). On peut aussi écrire $\dfrac{\mathrm{d}\dot\theta}{\mathrm{d}t} = \ddot\theta$.

I.2 Utilisation d'un pendule sans ressort de rappel

3. La trajectoire d'un point quelconque de ce pendule est un arc de cercle dont le centre est sur l'axe (Oz).

On a $v = \dot\theta\, OM$.

4. Voir ci-contre. Il n'est pas nécessaire de tracer les flèches. On rappelle aussi que le portrait de phase représente les trajectoires dans le plan $(\theta, \dot\theta)$, et qu'il est périodique dans la direction θ de période 2π.



5. **a -** ⋆ Système : solide de masse m et de moment d'inertie J par rapport à (Oz).

⋆ Référentiel : terrestre supposé galiléen.

⋆ Bilan des actions s'exerçant sur le solide et expression de leur moment selon l'axe (Oz) :

- Action de la liaison pivot, de moment nul car on néglige tout frottement.
- Action du poids, de résultante $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_x$ au point G.
  Le bras de levier de cette force est $a\sin\theta$. Tel que sur le dessin de l'énoncé où on a bien $\theta > 0$, $\vec{P}$ tend à faire tourner le solide dans le sens qui est contraire à celui de (Oz) d'après la règle du tire-bouchon (ou de la main droite), donc dans ce cas là le moment est négatif.
  On a donc $M_{(Oz)}(\vec{P}) = -a\sin\theta \times mg = -mga\sin\theta$.

⋆ Le moment cinétique s'exprime comme $L_{(Oz)} = J\dot{\theta}$.

⋆ D'après le théorème du moment cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}L_{(Oz)}}{\mathrm{d}t} = M_{(Oz)}(\vec{P}), \qquad \text{d'où } \boxed{J\ddot{\theta} = -mga\sin\theta}. \tag{2}$$

Remarque : On peut aussi calculer le moment de $\vec{P}$ de façon plus mathématique : $M_{(Oz)}(\vec{P}) = [\overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}]\cdot\vec{e}_z = [(a\cos\theta\vec{e}_x + a\sin\theta\vec{e}_y)\wedge mg\vec{e}_x]\cdot\vec{e}_z = mga[\sin\theta\,\vec{e}_y\wedge\vec{e}_x]\cdot\vec{e}_z = mga[\sin\theta\,(-\vec{e}_z)]\cdot\vec{e}_z = -mga\sin\theta$.

b - Pour $\theta \ll 1$, on a $\sin\theta \sim \theta$, l'équation précédente devient donc $J\ddot{\theta} = -mga\theta$, soit sous forme canonique : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{mga}{J}\theta}$.

On reconnaît une équation du type oscillateur harmonique, de pulsation $\omega^2 = \dfrac{mga}{J}$, et donc de période $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}}$.

6. a - On a

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg'a}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m(g+\Delta g)a}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg(1+\frac{\Delta g}{g})a}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}\left(1+\frac{\Delta g}{g}\right)^{-1/2}.$$

On a bien quelque chose de la forme $(1+\epsilon)^\alpha$, qui est équivalent à $\simeq 1 + \alpha\epsilon$ pour ϵ petit.
Donc $T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mga}}\left(1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta g}{g}\right)$.

On reconnaît $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mga}}$ dans cette expression, d'où : $\boxed{T' = T\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}\right)}$.

b - La sensibilité est $s = \dfrac{\Delta T}{T} = \dfrac{T'-T}{T} = \dfrac{T\left(1-\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}\right) - T}{T}$,

$$\text{d'où } \boxed{s = -\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}}.$$

I.3 Utilisation d'un pendule avec ressort spiral de rappel

7. a - Pour un point matériel de masse m, le travail de la force de pesanteur $\vec{F} = m\vec{g}$ pour un déplacement élémentaire $\mathrm{d}x\,\vec{e}_x$ est

$$\delta W = m\vec{g}\cdot\mathrm{d}x\,\vec{e}_x = -mg\vec{e}_x\cdot\mathrm{d}x\,\vec{e}_x, \quad \text{soit } \boxed{\delta W = -mg\mathrm{d}x}.$$

b - L'énergie potentielle de pesanteur $E_{\mathrm{p,pes}}$ est telle que

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{p,pes}} = -\delta W = mg\mathrm{d}x, \quad \text{d'où } \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p,pes}}}{\mathrm{d}x} = mg, \quad \text{d'où } \boxed{E_{\mathrm{p,pes}} = mgx + C}.$$

c - Dans le cas d'un solide, x doit désigner l'altitude du centre de masse du solide. Il s'agit donc ici de G. On a donc $x = x_G = a\cos\theta$. En choisissant la constante nulle, on obtient $\boxed{E_{\mathrm{p,pes}} = mga\cos\theta}$.

8. **a -** L'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe Oz fixe est $E_c = \dfrac{1}{2}J\dot{\theta}^2$, avec J le moment d'inertie autour de l'axe Oz.

On a donc ici

$$\boxed{E_m = E_c + E_{\text{p,pes}} + E_{\text{p,ressort}} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mga\cos\theta + \frac{1}{2}K\theta^2.}$$

b - Les forces qui s'exercent sur le pendule sont le poids et l'action du ressort, qui sont conservatives, et l'action de liaison en O, qui est supposée parfaite et donc ne travaille pas. En conséquence, l'énergie mécanique se conserve : $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$.

On a donc, en dérivant l'équation précédente par rapport au temps :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}J\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}^2 + mga\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\theta + \frac{1}{2}K\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta^2 \\ &= \frac{1}{2}J\,2\ddot{\theta}\dot{\theta} - mga\dot{\theta}\sin\theta + \frac{1}{2}K\,2\dot{\theta}\theta, \end{aligned}$$

$$\text{soit : } \boxed{\ddot{\theta} - \frac{mga}{J}\sin\theta + \frac{K}{J}\theta = 0.}$$

9. **a -** Pour θ petit, on a $\sin\theta \sim \theta$, et l'équation du mouvement devient donc

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{K - mga}{J}\right)\theta = 0.$$

On reconnaît l'équation de l'oscillateur harmonique, de pulsation $\omega^2 = \dfrac{K - mga}{J}$, à condition d'avoir $\dfrac{K - mga}{J} > 0$, et donc d'avoir $\boxed{K > mga}$.

b - On vient de montrer que la pulsation est $\omega^2 = \dfrac{K - mga}{J}$, donc la période des oscillations est $T = 2\pi/\omega$, soit

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{K - mga}}.}$$

10.

11. **a -**

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^2} - \frac{1}{T'^2} &= \frac{1}{T^2} - \frac{1}{(T + \Delta T)^2} \\ &= \frac{1}{T^2} - \frac{1}{T^2}\frac{1}{\left(1 + \dfrac{\Delta T}{T}\right)^2} \\ &= \frac{1}{T^2} - \frac{1}{T^2}\left(1 - 2\frac{\Delta T}{T}\right) \quad \text{(développement limité car } \Delta T \ll T) \\ &= \boxed{-2\frac{\Delta T}{T^3}} \end{aligned}$$

b - On a $\dfrac{1}{T^2} = \dfrac{1}{4\pi^2}\dfrac{K - mag}{J}$, et donc $\dfrac{1}{T'^2} = \dfrac{1}{4\pi^2}\dfrac{K - mag - ma\Delta g}{J}$.

$$\text{Donc : } \boxed{\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T'^2} = \frac{ma\Delta g}{4\pi^2 J}.}$$

c - On combine les résultats des deux questions précédentes :

$$s_1 = \frac{\Delta T}{T} = -\frac{T^2}{2}\frac{ma\Delta g}{4\pi^2 J},$$

$$\text{soit } \boxed{s_1 = \frac{ma\Delta g}{2(K - mga)}}$$

12. On veut que $|s_1| > |s|$, soit $\dfrac{ma|\Delta g|}{2(K - mga)} > \dfrac{|\Delta g|}{2g}$, ce qui est possible si

$$\text{soit} \quad \boxed{2mag > K.}$$