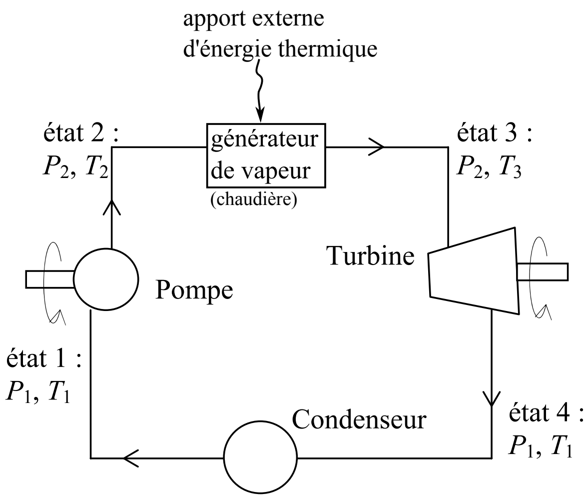
À rendre le jeudi 3 novembre

DM 7 – Thermodynamique et autres révisions

I Thermodynamique : étude du cycle de Rankine

Une centrale thermique produit de la chaleur en brûlant un combustible fossile (charbon, gaz naturel). Une centrale nucléaire produit également de la chaleur en exploitant des réactions nucléaires de fission. Dans ces deux cas, il faut trouver un moyen de convertir cette énergie thermique en travail mécanique (rotation d'un arbre) qui peut ensuite, via une dynamo, être utilisée pour générer de l'électricité.

La plupart des centrales thermiques ou nucléaires utilisent pour cela le cycle de Rankine, que nous allons étudier ici. C'est aussi ce cycle qui est utilisé dans les machines à vapeur des bateaux (la source de chaleur est alors une chaudière), ou dans les sous-marins nucléaires (la source de chaleur est un réacteur nucléaire).



Le fluide caloporteur est l'eau. Il entre dans la pompe sous forme de liquide saturé (état 1), puis est comprimé de façon isentropique (adiabatique réversible) à la pression qui règne dans le générateur de vapeur (GV). En entrant dans le GV, l'eau se trouve sous forme de liquide comprimé à la pression p_2 (état 2). Elle en ressort sous forme de vapeur (état 3) à la même pression p_2 puis pénètre dans la turbine où elle se détend de façon isentropique (adiabatique réversible) en entraînant l'arbre de l'alternateur. À la sortie de la turbine (état 4), l'eau est diphasée. Ce mélange liquide-vapeur est alors liquéfié à pression constante dans le condenseur et en sort dans l'état 1.

On utilise le diagramme entropique de l'eau fourni à la fin du document (doc. 2). Il représente la température en fonction de l'entropie massique de l'eau. On donne également une représentation schématique (doc. 1) du diagramme T-s.

1. Sur cette représentation schématique (doc. 1), indiquer la courbe de rosée, d'ébullition, le domaine du liquide, de la vapeur, de l'équilibre diphasique, ainsi que ce qui représente une évolution isobare et une évolution isenthalpique.

On donne $p_2 = 50 \times 10^5$ Pa, $p_1 = 1.0 \times 10^5$ Pa, $T_3 = 773$ K (500°C). Les points 1 et 2 figurent déjà sur le diagramme T-s de l'eau fourni.

2. Sur le diagramme expérimental (doc. 2), placer les points 3 et 4 qui correspondent aux états 3 et 4 du fluide, et tracer le cycle de Rankine décrit par le fluide.

3. Toujours à l'aide du même diagramme, donner les valeurs numériques de T_1, h_3, h_4, s_4, $s_v(T_1)$ entropie massique de la vapeur juste saturante à T_1, et $s_l(T_1)$ entropie massique du liquide juste saturé à T_1.

4. Déduire de la question précédente la valeur du titre en vapeur x_4 à la sortie de la turbine. On exprimera pour cela s_4 en fonction de x_4, $s_v(T_1)$ et $s_l(T_1)$.

Le générateur de vapeur peut être considéré comme un système ouvert, dans lequel entre du fluide dans l'état 2, et ressort du fluide dans l'état 3. On montrera dans un chapitre ultérieur que le premier principe pour un système ouvert (on dit aussi "le premier principe pour un système en écoulement") peut s'écrire comme $\Delta h = w_i + q$, avec h l'enthalpie massique du fluide, $\Delta h = h_{\text{fluide sortant}} - h_{\text{fluide entrant}}$, q le transfert thermique massique reçu par le fluide, et w_i le travail massique indiqué reçu par le fluide de la part des parties mobiles du composant. On a $w_i = 0$ dans le générateur de vapeur (pas de parties mobiles).

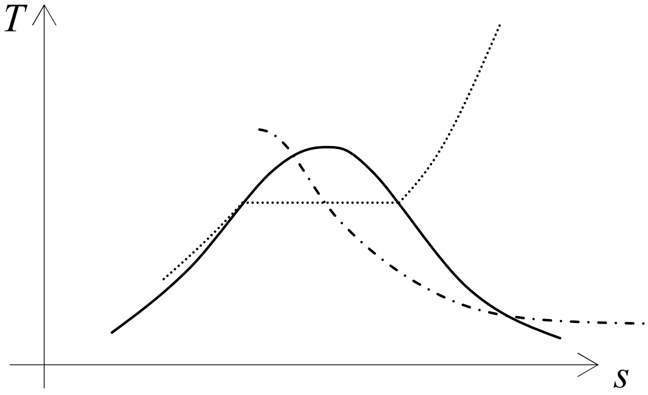
6. On donne $h_1 = 440\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ et $h_2 = 475\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$. En appliquant le premier principe pour un système ouvert au générateur de vapeur, exprimer puis calculer le transfert thermique massique q_{GV} reçu par le fluide dans le GV.

7. Faire de même pour le transfert thermique massique q_{cond} reçu par le fluide dans le condenseur. Ici aussi on a $w_i = 0$.

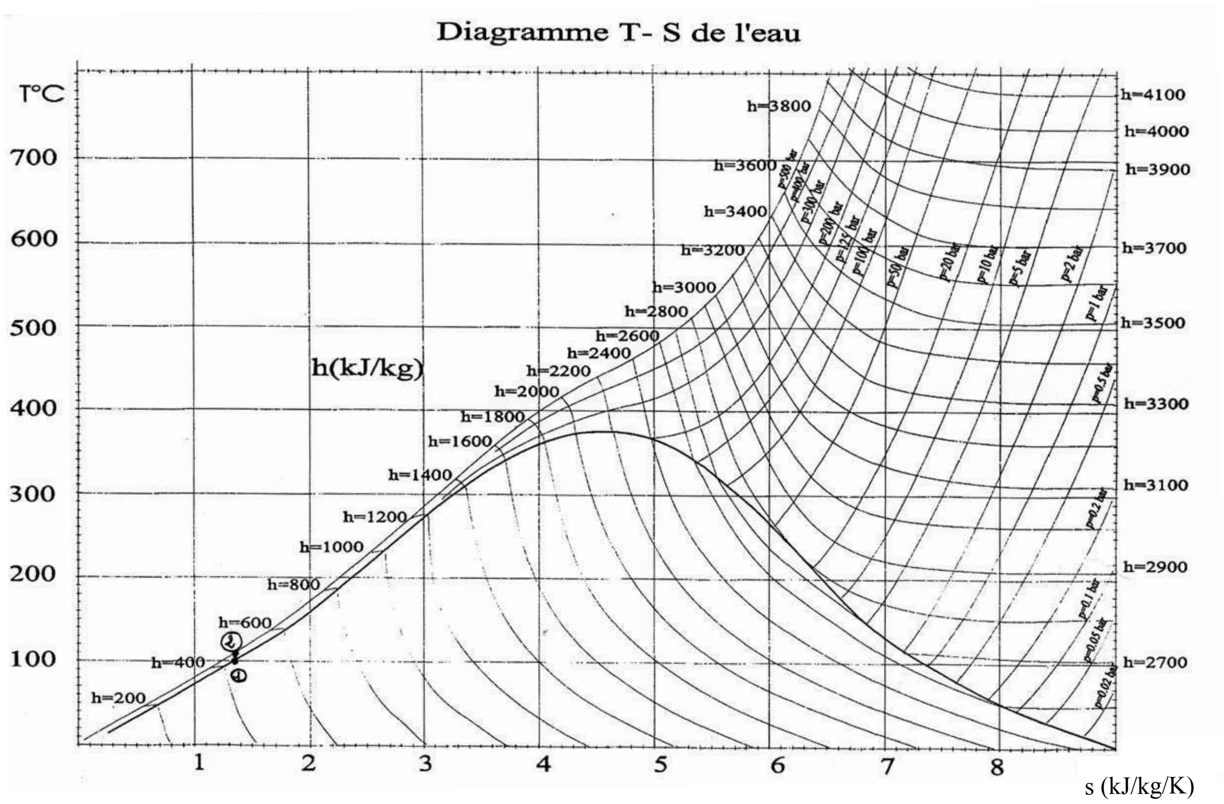
8. On considère qu'il y a une masse m d'eau en écoulement dans le système. En appliquant le premier principe sur un cycle au fluide caloporteur, donner l'expression du travail reçu W par le fluide au cours du cycle en fonction de m, q_{GV} et q_{cond}.

9. Définir le rendement η du cycle, puis donner son expression en fonction de q_{GV} et q_{cond}, et enfin donner sa valeur numérique dans le cas considéré ici (les données de l'énoncé correspondent à la propulsion d'un sous-marin nucléaire).

10. Si on estime que le sous-marin a besoin d'une puissance motrice de 60 MW sur l'arbre en sortie de la turbine, quelle doit être la puissance thermique apportée par le réacteur nucléaire ?



(doc. 1) Diagramme T-s schématique à compléter.



(doc. 2) Diagramme T-s de l'eau à compléter avec le cycle.

II Révisions de mécanique : mesure de la pesanteur

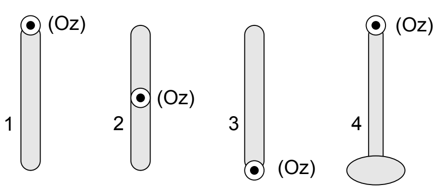
Remarque : Il n'y a rien de nouveau en mécanique en 2e année, et nous n'en ferons donc pas en cours. Il est toutefois important de continuer à pratiquer un minimum cette partie du programme pendant l'année pour ne pas avoir à tout redécouvrir trois semaines avant les écrits. C'est le but de cette partie.

L'objectif est d'étudier deux méthodes de mesure de la pesanteur g en un point à la surface de la Terre. Ces méthodes utilisent tour à tour deux types différents de pendule.

II.1 Questions introductives

1. **a -** Rappeler la définition du moment d'inertie J d'un solide par rapport à un axe (Oz), ainsi que son unité SI.

   b - On considère les quatre solides ci-contre, tous de même masse et faits dans le même matériau. Classer les moments d'inertie par ordre croissant.



2. Donner l'énoncé du théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe (Oz) fixe à la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$.

II.2 Utilisation d'un pendule sans ressort de rappel

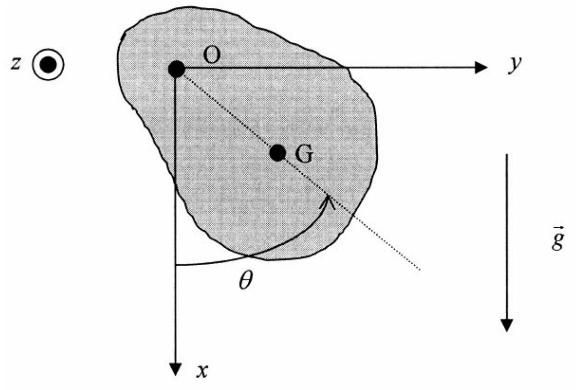
Un pendule est composé par un solide de masse m, de centre d'inertie G, mobile autour d'un axe horizontal (Oz) et de moment d'inertie J par rapport à cet axe.

Il peut effectuer des mouvements de rotation dans le plan vertical (Oxy), autour de l'axe horizontal (Oz).
La position du pendule est repérée par l'angle θ entre la droite (OG) et la verticale descendante. On notera a la distance OG.

L'étude sera menée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Les frottements au niveau de l'axe de rotation et les frottements de l'air seront négligés.

Le pendule ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur $\vec{g}$ tel que $\vec{g} = g\vec{e}_x$.



3. Quelle est la trajectoire d'un point de ce pendule ?

On note $\dot{\theta}$ la vitesse angulaire du pendule. Donner la relation entre la norme de la vitesse d'un point M, la distance OM, et $\dot{\theta}$.

4. Dessiner l'allure du portrait de phase de ce pendule. On indiquera les trajectoires du portrait de phase qui correspondent à un mouvement pendulaire, et celles qui correspondent à un mouvement de révolution.

5. **a -** En appliquant le théorème du moment cinétique, établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ au cours du temps.

b - En déduire la période T des petites oscillations du pendule autour de sa position d'équilibre, repérée par $\theta = 0$. On exprimera T en fonction de J, m, g et a.

6. On souhaite étudier l'influence de la variation d'intensité Δg du champ de pesanteur sur la période du pendule. Pour cela, on définit la sensibilité s du pendule comme le rapport $s = \dfrac{\Delta T}{T}$ où ΔT représente une variation infiniment petite de la période du pendule engendrée par une variation infiniment petite Δg du champ de pesanteur.

a - On note T la période mesurée lorsque l'intensité de la pesanteur est g, et $T' = T + \Delta T$ la période mesurée lorsqu'elle vaut $g' = g + \Delta g$.
Exprimer T' en fonction de T et de $\Delta g/g$.
On rappelle qu'on a au premier ordre en ϵ : $(1+\epsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\epsilon$. Attention, ϵ est nécessairement une grandeur sans unité.

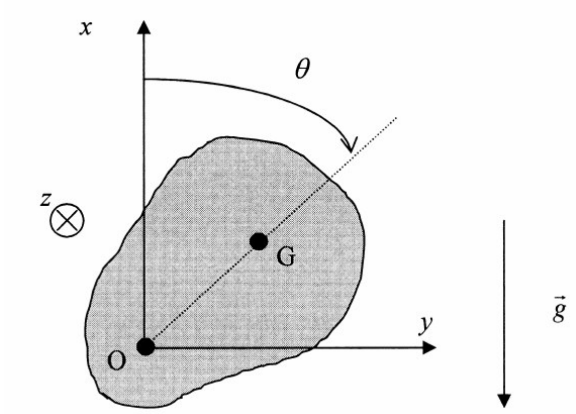
b - Déterminer l'expression de la sensibilité s en fonction de Δg et g.

II.3 Utilisation d'un pendule avec ressort spiral de rappel

Le pendule précédent est maintenant soumis à l'action d'un ressort spiral qui exerce un couple de rappel $M = -K\theta$ sur le pendule où K est une constante positive.
La position du pendule est repérée par l'angle θ entre la droite (OG) et la verticale ascendante (**attention**, les conventions ont donc changé par rapport à la partie précédente).

On effectue les mêmes hypothèses que précédemment (référentiel galiléen, aucun frottements).

L'énergie potentielle du ressort spiral ne dépend que de θ et est donnée par $E_p = \dfrac{1}{2}K\theta^2$.



7. **a -** En considérant un point matériel de masse m, établir l'expression du travail de la force de pesanteur pour un déplacement élémentaire $\mathrm{d}x\,\vec{e}_x$.

b - En déduire que l'énergie potentielle de pesanteur a pour expression $E_{\mathrm{p,pes}} = mgx + \mathrm{cst}$.

c - Dans le cas du pendule, montrer que celle-ci peut s'écrire $E_{\text{p,pes}} = mga\cos\theta$.

8. **a -** Exprimer l'énergie mécanique totale $E_m(\theta, \dot{\theta})$ du système pendule-ressort.

b - En déduire l'équation du mouvement du pendule.

9. **a -** En considérant que l'angle θ reste petit, déterminer la condition à respecter pour que la position $\theta = 0$ soit une position d'équilibre stable d'un oscillateur harmonique. La relation sera donnée sous la forme d'une relation entre K, m, g et a.

b - Montrer que la période T des petites oscillations du pendule autour de la position $\theta = 0$ est $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{K - mga}}$.

10. On considère que la condition précédente est vérifiée. On veut déterminer la sensibilité s_1 de ce pendule, que l'on définit de la même façon que précédemment. Les calculs étant un peu plus compliqués que dans le cas précédent, on procède en plusieurs étapes :

11. **a -** On considère encore $T' = T + \Delta T$. Exprimer $\dfrac{1}{T^2} - \dfrac{1}{T'^2}$ en fonction de ΔT et de T seulement.

b - Indépendamment de la question précédente, exprimer $\dfrac{1}{T^2} - \dfrac{1}{T'^2}$ en fonction de K, m, g, a, J, et Δg.

c - Conclure en donnant l'expression de la sensibilité $s_1 = \dfrac{\Delta T}{T}$ en fonction de K, m, g, a et Δg.

12. Montrer que ce pendule avec ressort de rappel permet, sous une condition portant sur K et d'autres grandeurs à préciser, d'obtenir une sensibilité plus grande que celle du pendule sans ressort.

III Révisions de chimie

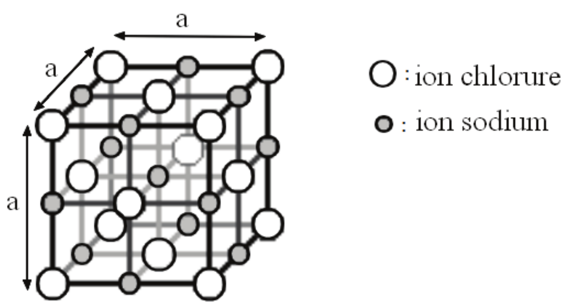
Le chlore a pour symbole ${}^{35}_{17}\mathrm{Cl}$.

1. Donner la composition d'un atome de cet élément.

2. Donner la configuration électronique du chlore dans son état fondamental.

3. En déduire la formule de l'ion monoatomique le plus stable de cet élément. Justifier.

Le chlorure de sodium cristallise sous la forme d'un réseau cubique faces centrées.



4. À l'aide de la figure ci-dessus, déterminer le nombre d'ions chlorure et d'ions sodium dans une maille.

5. En déduire la formule chimique de ce cristal.

6. De l'électroneutralité du cristal, déduire la charge de l'ion sodium. À quelle famille de la classification périodique l'ion sodium appartient-il ?

7. Un logiciel de simulation nous permet de déterminer le paramètre $a = 564\,\text{pm}$ de maille. À partir de cette unique donnée est-il possible de déterminer le rayon r_{Cl} de l'ion chlorure et le rayon r_{Na} de l'ion sodium ? Justifier.