Partie II : Thermodynamique et fluides

Points plus techniques sur

le 1er principe pour un système ouvert

Cette fiche va au delà du programme de CPGE et ne s'adresse pas vraiment aux étudiants.

Résumé :
Énoncé puis démonstration du 1er principe pour un système ouvert. On donne des détails sur les interactions parois-fluide et autres travaux internes au système à la fin de la démonstration. Cas d'un système non stationnaire mais périodique. Puis la dernière partie est un exemple d'utilisation (écoulement dans un gazoduc avec frottements parois↔fluide).

I Premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert

I.1 Énoncé

On considère un système à une entrée et une sortie, à travers lequel s'écoule un fluide. Le système considéré est un volume de contrôle fixe dans l'espace, à travers lequel entre et sort un fluide. Le système comprend tout ce qui est dans le volume de contrôle : les parois, d'éventuelles hélices, pistons, pâles, résistances chauffantes, etc.

Ce système ouvert échange avec le milieu extérieur :

– Un transfert thermique massique q à travers les parois du système.

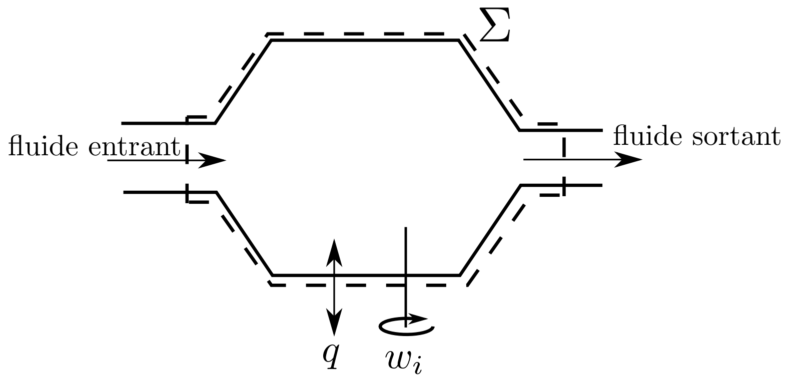
– Un travail indiqué massique w_i, travail reçu par le système, autre que celui produit par les forces de pression du fluide en entrée et en sortie du système. Ce travail comprend par exemple le travail des parties mobiles agissant sur le fluide.

– Du fluide en entrée et en sortie.

On a alors, sous l'hypothèse du régime stationnaire :

$$\boxed{\Delta e_p + \Delta e_c + \Delta h = w_i + q,} \tag{1}$$

où Δ dénote la différence d'une grandeur caractérisant le fluide entre entrée et sortie, par exemple $\Delta u \equiv u_s - u_e$; $h = u + p/\rho$ l'enthalpie massique du fluide ; $e_c = \dfrac{1}{2}U^2$ l'énergie cinétique massique du fluide ; e_p l'énergie potentielle massique du fluide, par exemple $e_p = gz$ dans le cas de celle de pesanteur avec axe z vers le haut.



I.2 Démonstration

On délimite un volume de contrôle fixe qui comprend les parois du dispositif. Le système considéré à l'instant t, noté Σ_t, comprend tout ce qui est dans ce volume de contrôle : le fluide, les parois (parois des conduites, du compresseur, etc.), les pales, hélices, résistances chauffantes, tampons, vannes, pistons, etc.

Ce système Σ_t échange avec le milieu extérieur :

- Du fluide, avec un débit massique identique en entrée et en sortie car l'écoulement est stationnaire.

  Nous notons avec un indice e les grandeurs intensives qui caractérisent le fluide à l'entrée de Σ_t, et avec un s celles pour le fluide en sortie.

- Un transfert thermique reçu q par unité de masse de fluide s'écoulant en entrée (ou en sortie, D_m valant la même chose en régime stationnaire). Ce transfert s'effectue à travers les parois. Il se fait avec le milieu extérieur qui est à la température T_{ext}.

- Un travail reçu w_i par unité de masse de fluide s'écoulant en entrée (ou en sortie). Ce travail est échangé via la rotation d'un arbre, via transport d'électricité s'il y a présence de résistances chauffantes, etc. On le nomme travail massique indiqué ou utile.

  Il peut y avoir un travail échangé par variation du volume, si les parois se déforment. Nous supposerons qu'elles sont indéformables (cela peut être vu comme conséquence de l'hypothèse stationnaire), si bien que ce travail de frontière est nul.

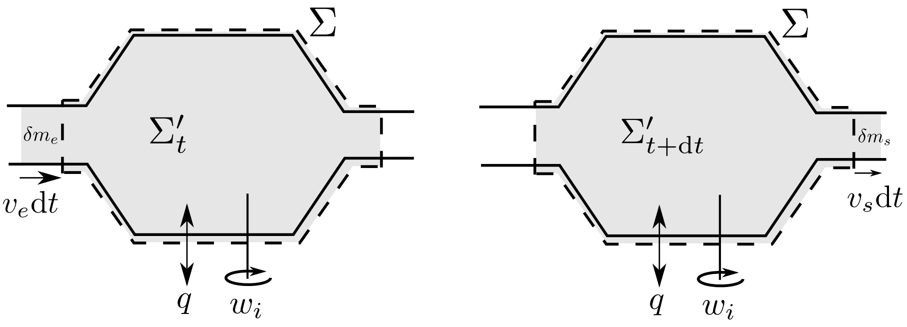
  Le travail des forces de pression en entrée et en sortie du fluide sera introduit lors de la considération du système fermé Σ' ci-dessous. Il n'est pas compris dans w_i. Il n'a de toute façon pas d'existence vis-à-vis du système ouvert Σ.

Remarquons qu'on inclut les parois du système de façon naturelle dans le cas des systèmes fermés (compression d'un gaz dans un piston : le système est {gaz+piston+cylindre}). Ceci est naturel ici aussi et, nous le verrons, évite bien des tracas.

Nous définissons ensuite un système fermé Σ' :

- À t, Σ'_t est la réunion de Σ_t et de la masse δm_e qui va entrer dans le système entre t et $t+\mathrm{d}t$.
- À $t+\mathrm{d}t$, $\Sigma'_{t+\mathrm{d}t}$ est la réunion de $\Sigma_{t+\mathrm{d}t}$ et de la masse δm_s qui est sortie du système entre t et $t+\mathrm{d}t$.

On remarque que $\delta m_e = \delta m_s$ par stationnarité, on notera donc cette masse δm. Le débit massique s'écrit $D_m = \dfrac{\delta m}{\mathrm{d}t}$.



Le premier principe pour un système fermé, appliqué à Σ' entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$, s'écrit

$$\mathrm{d}E_c + \mathrm{d}E_p + \mathrm{d}U = \delta W_p + \delta W_i + \delta Q, \tag{2}$$

où :

- δQ est le transfert thermique reçu par Σ' à travers les parois. Il s'est écoulé une masse δm en entrée, donc par définition on a $q = \dfrac{\delta Q}{\delta m}$.
- δW_i est le travail reçu via des arbres en rotation, fils électriques, etc. Ici aussi, on retrouve $w_i = \dfrac{\delta W_i}{\delta m}$ défini plus tôt.
- δW_p est le travail de frontière s'exerçant sur Σ' : travail des forces de pression en entrée et en sortie, exercé par le fluide de part et d'autre des frontières de Σ'. Il s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned} \delta W_p &= p_e S_e (v_e \mathrm{d}t) - p_s S_s (v_s \mathrm{d}t) \\ &= \frac{p_e}{\rho_e}(\rho_e S_e v_e \mathrm{d}t) - \frac{p_s}{\rho_s}(\rho_s S_s v_s \mathrm{d}t) \\ &= \left(\frac{p_e}{\rho_e} - \frac{p_s}{\rho_s}\right) D_m \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3}$$

- La variation d'énergie interne est :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U &= U(\Sigma'_{t+\mathrm{d}t}) - U(\Sigma'_t) \\ &= U(\Sigma_{t+\mathrm{d}t}) + U(\delta m_s) - U(\Sigma_t) - U(\delta m_e) \quad \text{(additivité de } U) \\ &= U(\Sigma_{t+\mathrm{d}t}) + \delta m_s\, u_s - U(\Sigma_t) - \delta m_e\, u_e \quad \text{(extensivité de } U). \end{aligned} \tag{4}$$

  Or le régime étant stationnaire, on a $U(\Sigma_{t+\mathrm{d}t}) = U(\Sigma_t)$. Disons ceci avec une phrase : par définition du régime stationnaire, les grandeurs d'état du volume fixe Σ n'évoluent plus dans le temps. Ainsi l'énergie interne de tout ce qui est contenu dans le volume de contrôle fixe Σ (ceci inclut le fluide, les parties mobiles, les résistances électriques, etc.) n'évolue pas dans le temps. Il reste donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U &= \delta m_s\, u_s - \delta m_e\, u_e \\ &= (u_s - u_e)\, D_m \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{5}$$

- $\mathrm{d}E_c$ et $\mathrm{d}E_p$ se traitent exactement de la même façon que U. On aboutit à

$$\mathrm{d}E_c = (e_{c,s} - e_{c,e})\, D_m \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{d}E_p = (e_{p,s} - e_{p,e})\, D_m \mathrm{d}t. \tag{6}$$

  e_c est défini tel que l'énergie cinétique d'une masse δm de fluide est $E_c = \delta m \times e_c$, donc $e_c = \dfrac{1}{2}U^2$ avec U la vitesse mésoscopique du fluide. e_p est défini tel que l'énergie potentielle d'une masse δm de fluide est $E_p = \delta m \times e_p$.

Ainsi, l'équation 2 se réécrit, après simplification du facteur $D_m \mathrm{d}t$, sous la forme :

$$(e_{c,s} - e_{c,e}) + (e_{p,s} - e_{p,e}) + (u_s - u_e) + \frac{p_s}{\rho_s} - \frac{p_e}{\rho_e} = w_i + q. \tag{7}$$

Il reste à introduire l'enthalpie massique du fluide, $h = \dfrac{H}{\delta m} = u + \dfrac{p}{\rho}$, pour aboutir à la forme annoncée :

$$(e_{c,s} - e_{c,e}) + (e_{p,s} - e_{p,e}) + (h_s - h_e) = w_i + q. \tag{8}$$

Quelques remarques à propos des actions parois $\leftrightarrow$ fluide :

- Les travaux associés à d'éventuelles actions des parois sur le fluide sont des travaux intérieurs au système Σ'. Leur effet est donc dans ΔU. Il n'y a pas à s'en soucier. Qu'il y ait des frottements du fluide sur les parois ou non ne change donc strictement rien à l'écriture de ce premier principe [1].

  De même pour les travaux des parties mobiles (pâles, hélices, pistons) sur le fluide, pour lesquels pourraient se poser la question de leur nature, tout comme dans l'expérience de Joule : travail ou chaleur ? Le fait de mettre dans Σ et donc dans Σ' tous ces éléments fait que les échanges avec l'extérieur se font par des biais parfaitement définis, tels que la rotation d'un arbre ou un travail électrique, ou un transfert thermique à travers les parois avec un milieu à la température connue T_{ext} (utile pour le second principe).

- Certains livres indiquent que le fluide adhère aux parois par viscosité, ce qui entraîne un travail de l'action des parois sur le fluide qui est nul. Cet argument n'est pas entièrement correct : cette adhérence du fluide aux parois est un modèle, qui n'est pas toujours approprié, et l'action tangentielle de frottement fluide-parois peut très bien entraîner un travail reçu par le fluide. Voir l'exemple de l'écoulement dans le gazoduc où il est essentiel de considérer que l'action des parois résulte en un travail reçu par le fluide, non nul, qui permet d'expliquer le comportement réel de l'écoulement.

  Encore une fois, la bonne façon de faire est de placer les parois dans le système, ce qui rend ces questions et d'autres (s'agit-il d'un transfert thermique qui échauffe le fluide ou du travail d'une force ?) sans importances : l'action parois-fluide devient une action intérieure, qui n'apparaît donc pas dans l'énoncé du premier principe.

- Enfin, on peut se demander s'il faut prendre en compte des travaux de frottement reçus par les petites masse δm_e et δm_s entrante et sortante. Comme on peut les prendre aussi petites que l'on veut ($\mathrm{d}t$ est arbitrairement petit), ces travaux sont négligeables.

I.3 Cas où l'évolution n'est pas stationnaire mais périodique

L'énoncé du premier principe sous la forme $\Delta e_c + \Delta e_p + \Delta h = w_i + q$ est également valable si l'évolution au sein du système ouvert Σ est périodique.

Ceci se constate en reprenant la démonstration de la partie I.2. Il faut seulement prendre la précaution de considérer un temps infinitésimal $\mathrm{d}t$ multiple entier d'une période. Il y a alors deux arguments qui sont modifiés :

- On a $U(\Sigma'_{t+\mathrm{d}t}) = U(\Sigma'_t)$, $E_c(\Sigma'_{t+\mathrm{d}t}) = E_c(\Sigma'_t)$ et $E_p(\Sigma'_{t+\mathrm{d}t}) = E_p(\Sigma'_t)$ non pas par stationnarité, mais par périodicité entre t et $t + \mathrm{d}t$, les grandeurs d'état du système ayant repris les mêmes valeurs.

- On a $\delta m_e = \delta m_s$ non pas par stationnarité, mais par un bilan de masse entre t et $t + \mathrm{d}t$: la masse dans le volume fixe Σ prend la même valeur à t et à $t + \mathrm{d}t$ par périodicité, or la masse totale du système fermé Σ' est constante, et donc nécessairement $\delta m_e = \delta m_s$.

De plus, les définitions des grandeurs q et w_i doivent être comprises comme valables sur un nombre entier de cycles seulement. Et enfin, $\mathrm{d}t$ ne peut plus être arbitrairement petit : il est au moins égal à un cycle. Ceci n'a pas d'incidence notable, sauf s'il y a prise en compte des frottements entre parois

1. Rappelons que les travaux des forces internes au système n'apparaissent pas dans le W du premier principe. Ces travaux dérivent par hypothèse d'une force conservative (microscopique dans le cas de frottements) et sont pris en compte dans ΔU.

et fluide en entrée et sortie du système, on ne peut alors plus nécessairement les négliger devant les frottements internes.

Ceci permet donc d'utiliser le premier principe pour un système ouvert même sous l'hypothèse, plus faible que celle de stationnarité, d'une évolution périodique.

Remarquons qu'on ne fait pas grand cas de tout ceci lorsque l'on étudie un compresseur, une pompe ou une turbine, alors que pourtant ces éléments contiennent des parties mobiles actionnées de façon périodique (les pistons, les pâles), et ne produisent donc pas des écoulements stationnaires. On peut dire deux choses :

- Les conséquences de la non stationnarité sont très probablement souvent négligeables. Certes, le cycle des pistons du compresseur va entraîner une certaine variation périodique des caractéristiques de l'écoulement en sortie, mais probablement faibles et négligeables devant la contribution moyenne stationnaire.
- Si l'on n'est pas convaincu par le point précédent, on peut toujours dire d'après la démonstration faite ici que le premier principe est en fait valide aussi pour un système ouvert périodique.

I.4 Exemple d'utilisation en présence de frottements : écoulement dans un gazoduc

On considère un gaz en écoulement stationnaire dans un gazoduc.

⋆ On utilise le modèle du gaz parfait. On a donc la relation $\boxed{pv = \frac{RT}{M},}$ avec v le volume massique.

⋆ On se place en régime stationnaire. On définit $J \equiv \frac{D_m}{\Sigma}$ avec D_m le débit massique (constant car stationnaire) et Σ la section du tuyau, constante par hypothèse. J est donc constant.

On note U la vitesse de l'écoulement. On a $\Sigma U \rho = D_m$, d'où la relation $U = \frac{D_m}{\Sigma\rho}$, soit donc $\boxed{U = Jv.}$

⋆ On considère une portion de gazoduc entre deux abscisses quelconques, ce qui peut être vu comme un système ouvert. On applique le premier principe à ce système ouvert :

$$\mathrm{d}e_c + \mathrm{d}e_p + \mathrm{d}h = w_i + q. \tag{9}$$

Or $q = 0$ car nous faisons l'hypothèse d'un gazoduc parfaitement calorifugé, $w_i = 0$ car pas de parties mobiles, $\mathrm{d}e_p = 0$ car pas de différence d'altitude. Notons qu'il y a bien présence de frottements entre gaz et parois (l'écoulement est irréversible, il y a perte de charge), mais ceci n'apparaît pas dans le premier principe car il s'agit d'actions internes au système. Il reste donc :

$$\mathrm{d}e_c + \mathrm{d}h = 0, \quad \text{soit} \quad \boxed{h + \frac{1}{2}U^2 = \text{cst} \equiv k,} \tag{10}$$

(parfois appelée loi de Saint-Venant, valable aussi si $\Sigma \neq$ cst, dans une tuyère par exemple). La constante k peut être évaluée en entrée où $U = 0$ et $T \equiv T_e$.

⋆ En mettant ensemble les trois points précédents, en utilisant $h = c_pT$, et après quelques manipulations, il vient :

$$\boxed{pv + \alpha v^2 = k, \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{J^2}{2}.} \tag{11}$$

On dispose ainsi d'une équation liant pression p et volume massique v. On peut déjà en conclure beaucoup de choses, que l'on ne fait pas ici.

⋆ Afin d'obtenir l'évolution des différentes quantités (p, v, etc.) en fonction de l'abscisse x, il est nécessaire de prendre en compte la force de frottement subie par le gaz contre les parois.

Cette force s'écrit par hypothèse comme $\vec{F} = -mf\vec{u}_x$ avec $f \equiv \tau_p \times \Sigma_0/m$, τ_p un coefficient pris constant, et Σ_0 la surface de contact entre la masse m et les parois.

La masse m occupe un volume $m \times v = \pi(d/2)^2 l$ avec d le diamètre du tuyau et l la longueur de tuyau occupée par la masse m. On isole ainsi l et on l'injecte dans l'expression $\Sigma_0 = 2\pi(d/2)l$. On arrive alors à $\Sigma_0 = \frac{4}{d}vm$. Et donc à

$$\boxed{f = -\tau_p\frac{4}{d}v.} \tag{12}$$

⋆ Le travail de cette force pendant dt est $\delta w_f = \frac{\delta W_f}{m} = -\tau_p\frac{4}{d}v\,U\mathrm{d}t$, et on pourrait appliquer le TEC dans sa version macroscopique au volume. Mais ceci est plein de pièges car il faut prendre garde à ce que le travail des forces de pression soit calculé comme $(p(x)\Sigma - p(x+l)\Sigma)v_G\mathrm{d}t$, ce qui est différent du travail qui apparait dans le premier principe (qui est $(p(x)\Sigma U(x) - p(x+l)\Sigma U_(x+l))\mathrm{d}t$).

Bref, ce TEC est de toute façon obtenu à partir du PFD. Appliquons donc le PFD à la particule de fluide entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$. Sa variation de quantité de mouvement (du centre de masse du système) est

$$\begin{aligned} \mathrm{d}P = P(t+\mathrm{d}t) - P(t) &= mU(x+U\mathrm{d}t) - mU(x) \\ &= mU\mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}mU^2\right)\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{13}$$

Les forces s'appliquant sur le système sont :

$$\begin{aligned} [p(x)\Sigma - p(x+l)\Sigma]\mathrm{d}t - mf\mathrm{d}t &= -\Sigma\epsilon\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}t - mf\mathrm{d}t \\ &= -mv\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}t - mf\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{14}$$

Le PFD s'écrit donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}U^2\right) = -v\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - f.} \tag{15}$$

⋆ Or le premier principe pour un écoulement et la seconde identité thermodynamique amènent à l'expression [2] :

$$\mathrm{d}e_c = -\mathrm{d}h = -T\delta s_c - v\mathrm{d}p. \tag{16}$$

Par identification avec l'expression 15 précédente de $\mathrm{d}e_c$, on en déduit

$$\boxed{T\delta s_c = f\mathrm{d}x = |\delta w_{\text{frottements}}|.} \tag{17}$$

Cette expression est tout à fait générale et aurait pu se passer de la démonstration utilisant le PFD : en effet, toute dégradation d'énergie est équivalente à une création d'entropie, le travail dégradé étant égal à la température multipliée par l'entropie créée. Ici les frottements sont la seule source de dégradation (en particulier l'écoulement étant adiabatique, il n'y a pas d'irréversibilité thermique). On peut écrire

$$\mathrm{d}e_c = \underbrace{(-v\mathrm{d}p)}_{\geq 0} - \underbrace{T\delta s_c}_{\geq 0}, \tag{18}$$

ce qui s'interprète ainsi : l'énergie cinétique augmente grâce à la détente du gaz (la chute de pression), mais la création d'entropie (les frottements ici) réduit cette augmentation en transformant une partie de l'énergie en une forme qui n'est plus récupérable (en l'occurrence une augmentation de température).

⋆ L'expression de $T\delta s_c$ du point précédent permet d'écrire que $\mathrm{d}e_c = -\tau_p\frac{4}{d}vU\mathrm{d}t - v\mathrm{d}p$, d'où :

$$U\mathrm{d}U = -\tau_p\frac{4}{d}v\mathrm{d}x - v\mathrm{d}p. \tag{19}$$

Il reste à utiliser l'équation 10 différenciée qui indique que $U\mathrm{d}U = -\mathrm{d}h = -c_p\mathrm{d}T = -\frac{\gamma}{\gamma-1}\mathrm{d}(pv) = -\frac{\gamma}{\gamma-1}\mathrm{d}(k-\alpha v^2) = \frac{\gamma}{\gamma-1}\alpha\mathrm{d}(v^2)$; puis l'équation 11 qui indique que $p = \frac{k}{v} - \alpha v$ et donc que $v\mathrm{d}p = -\frac{k}{v}\mathrm{d}v - \alpha v\mathrm{d}v$.

On a donc

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\alpha 2v\mathrm{d}v = \tau_p\frac{4}{d}v\mathrm{d}x + \frac{k}{v}\mathrm{d}v + \alpha v\mathrm{d}v, \tag{20}$$

c'est-à-dire une équation différentielle sur $v(x)$ qu'il est possible d'intégrer pour obtenir l'évolution de v (et donc par suite de p, T, U, etc.) en fonction de la distance x.

2. On mélange deux points de vue ici, mais c'est licite en régime stationnaire : le 1er principe pour un écoulement où les "d" ont la signification de variation entre deux abscisses (il faudrait en réalité l'écrire $\frac{\mathrm{d}e_c}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}$) ; et la seconde identité qui est au départ valable pour une particule de fluide et où les "d" ont le sens de variation temporelle pour cette particule (il faudrait l'écrire $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + T\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$). Mais on a, par exemple, $(\mathrm{d}p)_{\text{particule}} = p(x+U\mathrm{d}t) - p(x) = U\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, si bien que l'identité pour une particule $(\mathrm{d}h)_{\text{particule}} = v(\mathrm{d}p)_{\text{particule}} + T(\mathrm{d}s)_{\text{particule}}$ devient aussi $U\mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = v\,U\mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + T\,U\mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}$ et on a bien aussi une seconde identité qui se comprend entre deux tranches spatiales d'écoulement.

⋆ Nous n'allons pas plus loin, l'idée n'étant pas de mener les calculs au bout (bien que cela soit possible, et qu'il y ait des choses intéressantes à dire). L'objectif de cet exemple est de montrer comment s'utilisent le premier principe, la seconde identité et l'égalité $T\delta s_c = |\delta w_{\text{dégradé}}|$ dans un cas où il y a des frottements.