Partie II : Thermodynamique et mécanique des fluides
Chapitre 1

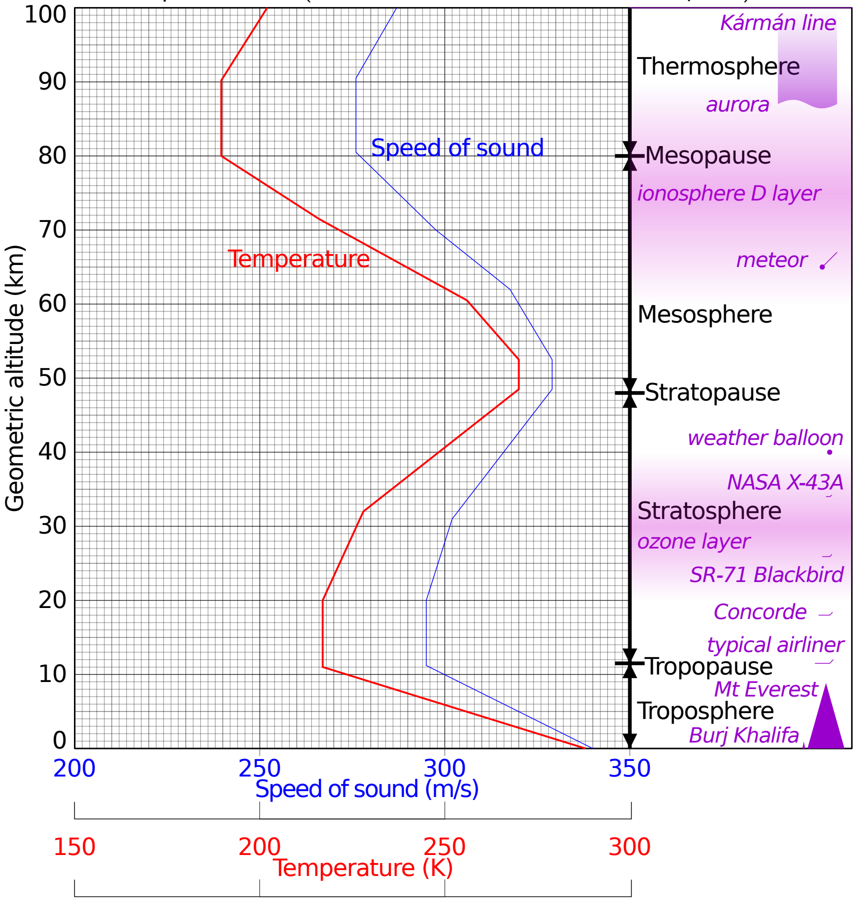
DM 4 – Statique des fluides

Calcul du champ de pression dans un gaz parfait non isotherme

On veut obtenir un modèle de la couche la plus basse de l'atmosphère : la troposphère (altitude entre 0 et 10 km). L'objectif est que ce modèle rende compte de la variation de pression avec l'altitude.
Le modèle commence par certaines hypothèses : l'atmosphère est au repos (pas de mouvement macroscopique d'air), le gaz de l'atmosphère est modélisé par un gaz parfait, de masse molaire $M = 29\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$, et la pesanteur est constante égale à $g = 9.8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Pour $z = 0\,\mathrm{km}$ on mesure $p_0 = 1.0\,\mathrm{bar}$.

Dans le cours, nous avons en plus supposé l'atmosphère isotherme : la température y est constante égale à T_0.

Évolution simplifiée de la température et de la vitesse du son en fonction de l'altitude dans l'atmosphère terrestre. La courbe de température est issue de relevés expérimentaux. (Source : 1962 US standard model, Wikipedia.)



1 - On se place d'abord dans le cadre de cette hypothèse. Démontrer que l'expression de la pression en fonction de l'altitude z est $p(z) = p_0 \exp(-z/H)$. On donnera l'expression de H. (On a vu cette démonstration dans le cours, mais il est demandé de la refaire ici pour s'entraîner.)

2 - Application : que vaut la pression à 1 km, et au sommet de l'Everest (8848 m) ?

3 - En étudiant le graphique ci-contre, que peut-on dire de cette hypothèse isotherme pour la troposphère ?

On va donc la remplacer par une hypothèse plus réaliste : on suppose que la température évolue linéairement, $T(z) = T_0 - \lambda z$.

4 - À l'aide du graphique ci-dessus, donner une valeur approchée de T_0 et de λ.

5 - En procédant de façon similaire à la question 1, montrer que la pression obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -p\frac{Mg}{R}\frac{1}{T_0 - \lambda z}. \tag{1}$$

6 - Montrer que l'expression suivante pour $p(z)$ est bien solution de cette équation différentielle :

$$p(z) = p_0\left(1 - \frac{\lambda z}{T_0}\right)^{\alpha}. \tag{2}$$

On donnera l'expression de α pour que ce soit bien le cas.

7 - Application : que vaut la pression à 1 km, et au sommet de l'Everest (8848 m) ? La différence avec le modèle précédent est-elle significative ?

8 – Bonus facultatif :

Les plus motivés pourront trouver la solution $p(z)$ de l'équation 1 de la façon suivante :

- Une méthode qui fonctionne souvent est de manipuler l'équation différentielle pour séparer les variables : on fait apparaître à gauche uniquement p et $\mathrm{d}p$, et à droite uniquement z et $\mathrm{d}z$. Ici il faut donc montrer qu'à partir de l'équation 1 qu'on arrive à :

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{Mg}{R}\frac{\mathrm{d}z}{T_0 - \lambda z}. \tag{3}$$

- Ensuite, on intègre cette équation entre les points $z = 0$ (où $p = p_0$) et $z = z_1$ quelconque (où $p = p(z_1)$) :

$$\int_{p=p_0}^{p=p(z_1)} \frac{\mathrm{d}p}{p} = \int_0^{z_1} -\frac{Mg}{R}\frac{\mathrm{d}z}{T_0 - \lambda z}. \tag{4}$$

  (On n'a pas utilisé z pour les bornes de l'intégrale car ce symbole est déjà utilisé pour la variable d'intégration.)

- Il faut ensuite calculer ces deux intégrales, ce qui fera apparaître $p(z_1)$, et manipuler le résultat pour exprimer $p(z_1)$ en fonction de z_1. On doit alors aboutir à l'expression 2.