Devoir Surveillé

Correction – DS 1

I Modèle électrique équivalent du haut-parleur

1. Loi des mailles et lois de comportement de la résistance et de la bobine :

$$\boxed{u + e = ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.}$$

2. On a simplement $\boxed{v_z(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.}$ On a donc $\boxed{\underline{v_z} = \mathrm{j}\omega\underline{z}.}$

3. L'équation mécanique en complexe s'écrit

$$\mathrm{j}\omega m\underline{v_z} = -\underline{i}\ell B - k\underline{z} - \lambda\underline{v_z}$$

et l'équation électrique

$$\underline{u} + \underline{e} = r\underline{i} + \mathrm{j}L\omega\underline{i}.$$

On utilise $\underline{v_z} = \mathrm{j}\omega\underline{z}$, ainsi que $\underline{e} = \underline{v_z}B\ell$ d'après l'énoncé, donc on a :

$$\boxed{\mathrm{j}\omega m\underline{v_z} = -\underline{i}\ell B - k\frac{\underline{v_z}}{\mathrm{j}\omega} - \lambda\underline{v_z} \quad \text{et} \quad \underline{u} + \underline{v_z}B\ell = r\underline{i} + \mathrm{j}L\omega\underline{i}.}$$

4. On isole $\underline{v_z}$ dans l'équation mécanique :

$$\underline{v_z} = \frac{-\underline{i}\ell B}{\mathrm{j}\omega m + \frac{k}{\mathrm{j}\omega} + \lambda},$$

et on remplace dans l'équation électrique :

$$\underline{u} - \frac{(\ell B)^2}{\mathrm{j}\omega m + \frac{k}{\mathrm{j}\omega} + \lambda}\underline{i} = r\underline{i} + \mathrm{j}L\omega\underline{i}.$$

On en déduit

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = r + \mathrm{j}L\omega + \frac{(B\ell)^2}{\mathrm{j}\omega m + \lambda + \frac{k}{\mathrm{j}\omega}}.}$$

5. L'impédance propre est donnée par

$$\boxed{\underline{Z_{\mathrm{e}}} = r + \mathrm{j}L\omega}$$

et l'impédance motionnelle par

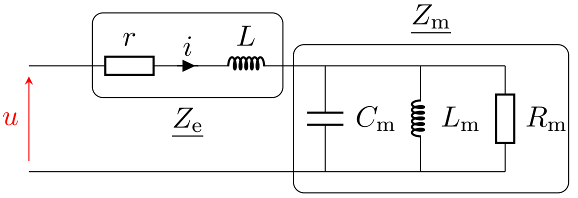
$$\boxed{\underline{Z_{\mathrm{m}}} = \frac{(B\ell)^2}{\mathrm{j}\omega m + \lambda + \frac{k}{\mathrm{j}\omega}}.}$$

6. On a vu que $\frac{1}{\underline{Z_{\mathrm{m}}}} = \frac{\mathrm{j}\omega m + \lambda + \frac{k}{\mathrm{j}\omega}}{(B\ell)^2}$. On identifie donc avec $\underline{Y_m}$ de l'énoncé pour en déduire :

$$\boxed{C_{\mathrm{m}} = \frac{m}{(B\ell)^2}, \qquad L_{\mathrm{m}} = \frac{(B\ell)^2}{k}, \qquad R_{\mathrm{m}} = \frac{(B\ell)^2}{\lambda}.}$$

Il s'agit respectivement **d'un condensateur, d'une bobine et d'une résistance associés en parallèle.**

7. On a le circuit équivalent ci-dessous :



8. L'impédance motionnelle s'écrit

$$
\begin{aligned}
\underline{Z_{\mathrm{m}}} &= \frac{1}{\mathrm{j}C_{\mathrm{m}}\omega + \dfrac{1}{\mathrm{j}L_{\mathrm{m}}\omega} + \dfrac{1}{R_{\mathrm{m}}}} \\
&= \frac{R_{\mathrm{m}}}{1 + \mathrm{j}\left(R_{\mathrm{m}}C_{\mathrm{m}}\omega - \dfrac{R_{\mathrm{m}}}{L_{\mathrm{m}}\omega}\right)} \\
&= \frac{R_{\mathrm{m}}\left(1 - \mathrm{j}\left(R_{\mathrm{m}}C_{\mathrm{m}}\omega - \dfrac{R_{\mathrm{m}}}{L_{\mathrm{m}}\omega}\right)\right)}{\left|1 + \mathrm{j}\left(R_{\mathrm{m}}C_{\mathrm{m}}\omega - \dfrac{R_{\mathrm{m}}}{L_{\mathrm{m}}\omega}\right)\right|^2}
\end{aligned}
$$

en multipliant par le complexe conjugué.

Le module vaut

$$\left|1 + \mathrm{j}\left(R_{\mathrm{m}}C_{\mathrm{m}}\omega - \frac{R_{\mathrm{m}}}{L_{\mathrm{m}}\omega}\right)\right|^2 = 1 + R_{\mathrm{m}}^2\left(C_{\mathrm{m}}\omega - \frac{1}{L_{\mathrm{m}}\omega}\right)^2$$

et ainsi la partie réelle s'écrit

$$R_T = \mathcal{R}\mathrm{e}(\underline{Z_{\mathrm{e}}}) + \mathcal{R}\mathrm{e}(\underline{Z_{\mathrm{m}}})$$

d'où on déduit

$$\boxed{R_T = r + \frac{R_{\mathrm{m}}}{1 + R_{\mathrm{m}}^2\left(C_{\mathrm{m}}\omega - \dfrac{1}{L_{\mathrm{m}}\omega}\right)^2}\,.}$$

9. R_T est maximale lorsque le dénominateur de la fraction est minimal, et donc lorsque le terme entre parenthèse est nul puisqu'il est au carré. Ainsi, la pulsation de résonance est

$$\omega_{\text{rés}}^2 = \frac{1}{L_{\mathrm{m}}C_{\mathrm{m}}} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\omega_{\text{rés}} = \frac{1}{\sqrt{L_{\mathrm{m}}C_{\mathrm{m}}}}\,.}$$

10. On lit graphiquement

$$\boxed{\omega_{\text{rés}} \simeq 550\,\mathrm{rad/s}, \qquad \text{d'où} \qquad f_{\text{rés}} = \frac{\omega_{\text{rés}}}{2\pi} = 87.5\,\mathrm{Hz}.}$$

Dans les deux limites $\omega \ll \omega_{\text{rés}}$ ou $\omega \gg \omega_{\text{rés}}$, on a $R_T \simeq r$. Graphiquement,

$$\boxed{r = 8\,\Omega.}$$

À la pulsation de résonance,

$$R_T = r + R_{\mathrm{m}} = 24\,\Omega, \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{R_{\mathrm{m}} = 16\,\Omega.}$$

La capacité motionnelle vaut

$$\boxed{C_{\mathrm{m}} = \frac{m}{(B\ell)^2} = 2.5 \times 10^{-4}\,\mathrm{F}.}$$

Enfin, en utilisant la pulsation de résonance,

$$\boxed{L_{\mathrm{m}} = \frac{1}{\omega_{\text{rés}}^2 C_{\mathrm{m}}} = 1.3 \times 10^{-2}\,\mathrm{H}\,.}$$

II Étude d'un instrument particulier : le thérémine

II.1 Contrôle de la tonalité du son émis par le thérémine

1. **a.** Ces fréquences sont supérieures à 20 kHz et ne sont donc **pas audibles**.

b. En entrée du multiplieur on a les signaux $s_1(t) = s_0\, sin(2\pi f_1 t)$ et $s_2(t) = s_0\, sin(2\pi f_2 t)$.
En sortie du multiplieur on a donc

$$s(t) = k s_0^2 \sin(2\pi f_1 t)\sin(2\pi f_2 t) = \frac{1}{2}\left[\cos(2\pi(f_1 - f_2)t) - \cos(2\pi(f_1 + f_2)t)\right].$$

Le spectre en sortie comprend donc une fréquence à $f_1 + f_2 = 160.4400\,\text{kHz}$ (inaudible) et une fréquence à $f_1 - f_2 = 440\,\text{Hz}$ (audible).

2. On souhaite ne garder que la composante audible. Il faut donc utiliser un filtre passe-bas.

3. **a.** Faire un schéma avec flèches de tension.

Loi des mailles : $u_{L0} + u_{C0} = 0$.

Et utilisation des lois des composants : $u_{L0} = L_0 \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L_0 C_0 \dfrac{\mathrm{d}^2 u_{C0}}{\mathrm{d}t^2}$. D'où :

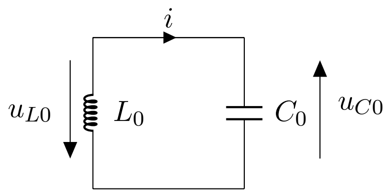


Figure 2 – circuit oscillant

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 u_{C0}}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u_{C0} = 0, \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}.}$$

b. On reconnait l'équation de l'oscillateur harmonique, dont les solutions sont du type

$$\boxed{u_{C0}(t) = A\,\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t).}$$

c. $\boxed{f_2 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L_0 C_0}}.}$

d. ⋆ Pour $t < 0$ on a $u_{c0}(t) = U_0$.
Or la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue, donc $u_{C0}(0^+) = u_{c0}(0^-) = U_0$.

⋆ Pour $t < 0$ on a $i(t) = 0$.
Or le courant traversant une bobine est une fonction continue, donc $i(0^+) = i(0^-) = 0$.
Or $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_{C0}}{\mathrm{d}t}$, donc on a $\dfrac{\mathrm{d}u_{C0}}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{i(0^+)}{C} = 0$.

⋆ On a donc nos deux conditions initiales : $u_{C0}(0^+) = U_0$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_{C0}}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$.
Or on a $u_{C0}(0^+) = A\,\cos(0) + B\sin(0) = A$, donc $\boxed{A = U_0.}$

Et on a $\dfrac{\mathrm{d}u_{C0}}{\mathrm{d}t} = -\omega_0 A\,\sin(\omega_0 t) + \omega_0 B\cos(\omega_0 t)$, d'où $\dfrac{\mathrm{d}u_{C0}}{\mathrm{d}t}(0^+) = \omega_0 B$, d'où nécessairement $\boxed{B = 0.}$

⋆ Finalement on obtient $\boxed{u_{C0}(t) = U_0\cos(\omega_0 t).}$

4. Le circuit L_0-C_0 est l'oscillateur de référence qui fournit la fréquence f_2. Le multiplieur est appelé mélangeur sur le schéma bloc. C'est le bloc nommé oscillateur et relié à l'antenne de pitch (ou tonalité) qui fournit le signal de fréquence f_1.

En sortie du mélangeur on a les fréquences $f_1 + f_2$ et $|f_1 - f_2|$.

C'est en sortie du flitre (passe-bas) qu'on a uniquement la fréquence audible $|f_1 - f_2|$.

5. **a.** Impédance équivalente de l'association en parallèle de C_0 et C_{h1} :

$$\frac{1}{Z_{\text{éq}}} = \frac{1}{1/\mathrm{j}C_0\omega} + \frac{1}{1/\mathrm{j}C_{h1}\omega} = \mathrm{j}(C_0 + C_{h1})\omega.$$

D'où $Z_{\text{éq}} = \dfrac{1}{\mathrm{j}(C_0 + C_{h1})\omega}$: les deux condensateurs en parallèle sont équivalent à un unique condensateur de capacité $C_0 + C_{h1}$ (il s'agit d'ailleurs d'un résultat connu que l'on peut donner directement).

La nouvelle fréquence d'oscillation est donc

$$\boxed{f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0(C_0 + C_{h1})}}.}$$

b. Le spectre en sortie est constitué de $\boxed{f_1 + f_2 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L_0(C_0 + C_{h1})}} + \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L_0C_0}}}$

et de $\boxed{f_2 - f_1 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L_0C_0}} - \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L_0(C_0 + C_{h1})}}.}$

La fréquence de coupure doit être supérieure à 20 kHz car le filtre doit laisser passer toutes les fréquences audibles, et elle doit être inférieure à environ 160 kHz pour couper toutes les hautes fréquences du type $f_1 + f_2$. Par exemple on peut choisir 60 kHz.

6. **a.** On utilise un pont diviseur de tension :

$$\underline{h} = \underline{u} \times \frac{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}}{R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}}, \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{T(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{h}}{\underline{u}} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega}.}$$

On a $T(\mathrm{j}\omega) = 1$ pour $\omega = 0$, et $T(\mathrm{j}\omega) \to 0$ pour $\omega \to +\infty$. Il s'agit donc bien d'un flitre passe-bas.

La pulsation de coupure à -3 dB est telle que $|T(\mathrm{j}\omega_c)| = \dfrac{|T|_{\max}}{\sqrt{2}}$, avec ici $|T|_{\max} = 1$.

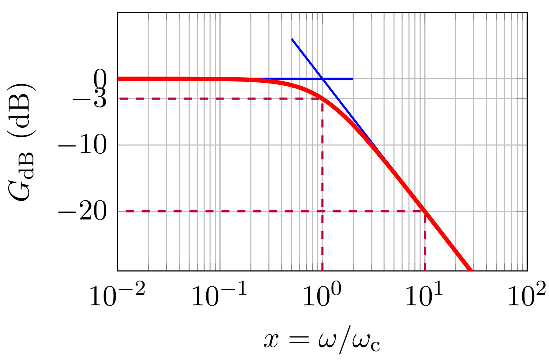
Or on a $|T(\mathrm{j}\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$. Il faut donc que $(RC\omega)^2 = 1$, soit donc $\omega_c = \dfrac{1}{RC}$, d'où la fréquence de coupure

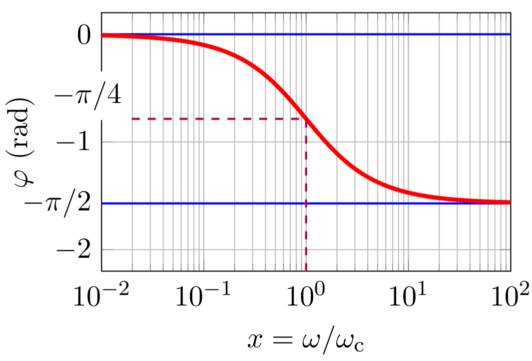
$$\boxed{f_c = \frac{1}{2\pi RC}.}$$

b. Pour $f_c = 60$ kHz, on obtient $\boxed{R \simeq 300\,\Omega.}$

c. On a $\boxed{|T(\mathrm{j}\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \quad \text{et} \quad \arg(T) = -\arctan(RC\omega).}$

Allure du diagramme de Bode, avec $\omega_c = 1/(RC)$:





7. À $\boxed{x = 20\ \text{cm.}}$

8. Si on approche la main, x diminue et donc f augmente : le son devient plus aigu.

Le thérémine couvre 5 octaves de 55 à 1760 Hz. Plus un petit bout entre 40 et 50 Hz.

Dans la zone centrale, il faut approcher la main de 12 cm pour doubler la fréquence (pour passer 110 à 220, puis à 440, puis à 880).

II.2 Contrôle du volume ou intensité du son émis

II.2.1 Filtrage passe-bande

9. Les étapes correspondantes sont réalisées par l'oscillateur avec L_1 et $C_1//C_{h2}$, par le filtre passe-bande, et par le détecteur (circuit avec la diode).

De même que précédemment, la fréquence d'oscillation du circuit avec L_1 et $C_1//C_{h2}$ est

$$\boxed{f' = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0(C_0 + C_{h1})}}.}$$

10. On raisonne à chaque fois à hautes fréquences (bobine = interrupteur ouvert et condensateur = fil), puis à basses fréquences (bobine = fil et condensateur = interrupteur ouvert).

Montage (a) :

- À hautes fréquences le condensateur est un fil, donc $s = 0$.
- À basses fréquences la bobine est un fil, donc $s = 0$.

Il s'agit bien d'un filtre passe bande.

Montage (b) :

- À hautes fréquences le condensateur est un fil et la bobine un interrupteur ouvert, donc on a $i = 0$, $u_R = 0$, et donc $s = e$.
- À basses fréquences la bobine est un fil, donc $s = 0$.

Il s'agit d'un filtre passe bas, qui ne convient pas.

Montage (c) :

- À hautes fréquences les deux condensateurs sont des fils, donc $s = 0$ (faire une loi des mailles dans la boucle avec C_1, C_2 et R_2 en remplaçant les condensateurs par des fils).
- À basses fréquences C_2 est un interrupteur ouvert, il n'y a donc aucun courant dans R_2, d'où $s = 0$.

Il s'agit bien d'un filtre passe bande.

11. **a.** H_0 : gain à la résonance, f_0 fréquence de résonance, et Q facteur de qualité.

b. Les pulsations de coupure à -3 dB sont telles que $|\underline{H}(\mathrm{j}\omega_c)| = \dfrac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}}$, avec ici $|\underline{H}|_{\max} = |H_0|$.

$$\begin{aligned}
& |\underline{H}(\mathrm{j}\omega_c)| = \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)^2}} = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} \\
\Leftrightarrow\ & Q^2\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)^2 = 1 \\
\Leftrightarrow\ & Q\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right) = \pm 1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} = \pm\frac{1}{Q} \\
\Leftrightarrow\ & f^2 - f_0^2 = \pm\frac{f_0}{Q}\, f \\
\Leftrightarrow\ & f^2 \mp \frac{f_0}{Q}\, f - f_0^2 = 0
\end{aligned}$$

On a donc deux trinomes à résoudre. Dans les deux cas le discriminant est $\Delta = \dfrac{f_0^2}{Q^2} + 4f_0^2 > 0$. Les racines sont réelles.

Avec le terme en $-\dfrac{f_0}{Q}f$ on obtient $f = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{f_0}{Q} \pm f_0\sqrt{\dfrac{1}{Q^2}+4}\right)$.

Avec le terme en $+\dfrac{f_0}{Q}f$ on obtient $f = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{f_0}{Q} \pm f_0\sqrt{\dfrac{1}{Q^2}+4}\right)$.

Les deux solutions acceptables pour les fréquences de coupures sont celles qui sont positives, à savoir :

$$\boxed{f_{c1} = \frac{1}{2}\left(-\frac{f_0}{Q} + f_0\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}\right) \quad \text{et} \quad f_{c2} = \frac{1}{2}\left(\frac{f_0}{Q} + f_0\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}\right).}$$

La différences entre les deux donne la bande passante : $\boxed{\Delta f = f_{c2} - f_{c1} = \dfrac{f_0}{Q}.}$

12. Le principe du calcul est simple : on peut appliquer un diviseur de tension entre $\underline{u}_2$ et $\underline{u}_1$, à condition d'assimiler l'ensemble {résistance R + bobine + condensateur} à une seule impédance équivalente Z_{eq}.

On a :

$$\frac{1}{Z_{\text{eq}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \frac{1}{1/(\mathrm{j}C\omega)} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega.$$

Le diviseur de tension donne :

$$\underline{s} = \underline{e} \times \frac{Z_{\text{eq}}}{R + Z_{\text{eq}}}$$

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{\frac{R}{Z_{\text{eq}}} + 1}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{R\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega\right) + 1}$$

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{\frac{-\mathrm{j}R}{L\omega} + \mathrm{j}RC\omega + 2}}$$

On veut aboutir à quelque chose de la forme suivante :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}.$$

Il faut donc d'abord qu'au dénominateur, le coefficient qui n'est ni devant ω ni devant $1/\omega$ soit égal à 1. On divise donc partout notre expression par 2 :

$$\underline{H} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\left(\frac{-\mathrm{j}R}{L\omega} + \mathrm{j}RC\omega\right) + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\mathrm{j}\,\frac{R}{2}\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) + 1}.$$

On a donc déjà $\boxed{H_0 = \dfrac{1}{2}}$.

Ensuite, on doit avoir par identification pour le terme en $\mathrm{j}\omega$: $\dfrac{RC}{2} = \dfrac{Q}{\omega_0}$.

Et pour celui en $1/(\mathrm{j}\omega)$: $\dfrac{R}{2L} = Q\omega_0$.

On a donc deux équations et deux inconnues (Q et ω_0). On en déduit facilement que

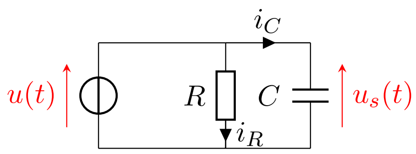
$$\boxed{Q = \sqrt{\frac{C}{L}}\,\frac{R}{2} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.}$$

13. On a

$$u_m = v_m \times |\underline{H}(\mathrm{j}f')| = v_m \times \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{f'}{f_0} - \frac{f_0}{f'}\right)^2}}$$

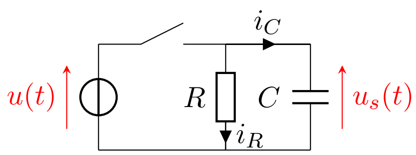
II.2.2 Détection de l'amplitude du signal

14. Schéma équivalent :



On a donc $\boxed{u_s = u.}$

15. Schéma équivalent :



C'est un simple circuit RC :

Loi des nœuds : $$i_C + i_R = 0$$

Lois de comportement : $$C\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} + \frac{u_s}{R} = 0$$

Forme canonique : $$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_s = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = 1/RC\,.}$$

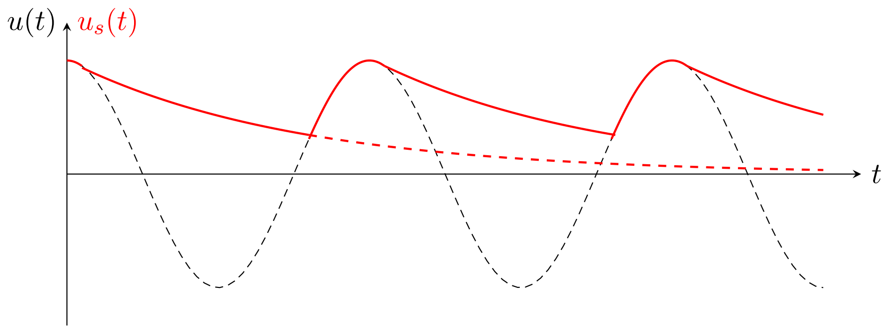
La solution particulière est nulle, donc la solution est de la forme

$$u_s(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

Enfin, $u_s(0) => U_0$ d'après l'énoncé, donc :

$$\boxed{u_s(t) = U_0\mathrm{e}^{-t/\tau}.}$$

16. La tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue, donc u_s garde la même valeur lorsque la diode change d'état.

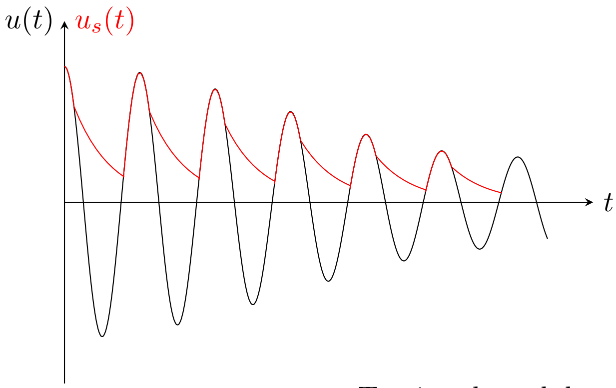


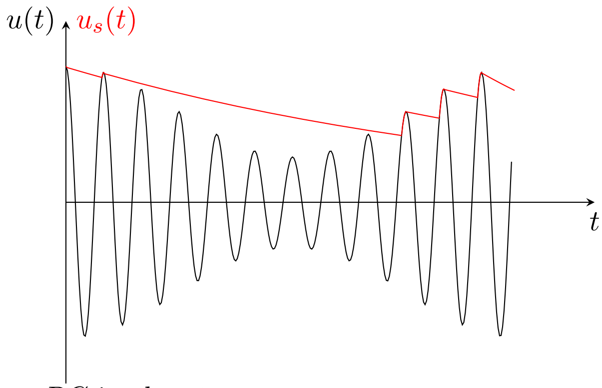
17. Si $\tau = RC$ est très faible, alors lorsque la diode est bloquée la tension u_s tend très vite vers 0. On a donc un signal $u_s(t)$ qui n'est pas du tout constant.

Si τ est très élevé, alors la décroissance exponentielle est très lente, et le signal u_s reste quasiment constant, égal au maximum du signal $u(t)$, donc égal à l'amplitude u_m : c'est justement ce qui était recherché.

On doit donc avoir $\boxed{RC \gg 1/\omega'}$ afin que le signal u_s soit une tension continue proportionnelle à l'amplitude u_m.

18. Il faut que $\boxed{RC \ll 1/f_m.}$ En effet, $1/f_m$ est la période avec laquelle l'amplitude du signal u varie. Il faut que la tension u_s puisse suivre ces variations, et donc que la décroissance exponentielle du circuit RC soit plus courte que cette période $1/f_m$.





Tension démodulée avec RC inadapté.

Gauche : RC trop petit, u_s décroit trop entre deux maxima de $u(t)$.

Droite : RC trop grand, u_s varie trop lentement et ne suit pas correctement les variations de l'amplitude de $u(t)$.