Partie I : Électronique
Rappels de 1re année

Correction – Systèmes linéaires

$\rightsquigarrow_{10}$ Donner l'expression de $|z|$ et de $\arg(z)$ en fonction de a et b.

On a :

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}. \tag{1}$$

Pour l'argument, on a à condition que la partie réelle de z soit positive strictement (donc que $a>0$) :

$$\arg(z) = \arctan\frac{b}{a}. \tag{2}$$

En physique on a quasiment toujours $a>0$ et il suffit de retenir la formule ci-dessus. Cela dit, si jamais $a<0$, on a la formule suivante :

$$\arg(z) = \pi + \arctan\frac{b}{a}. \tag{3}$$

On peut en profiter pour rappeler les propriétés suivantes : si z_1 et z_2 sont des complexes, on a

$$\arg(z_1\, z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2). \tag{4}$$

On a aussi $\arg(1) = 0$, $\arg(-1) = \pi$, $\arg(\mathrm{j}) = \pi/2$, $\arg(-\mathrm{j}) = -\pi/2$.
Pour le module :

$$|z_1\, z_2| = |z_1| \times |z_2|, \qquad et \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}. \tag{5}$$

$\rightsquigarrow_{11}$ À haute fréquence, bobine =interrupteur ouvert et condensateur = fil.

$\rightsquigarrow_{12}$ À basse fréquence, bobine =fil et condensateur = interrupteur ouvert.

$\rightsquigarrow_{13}$

1 - Comportement asymptotique :

- À basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. On a donc pas de courant, donc $u_R = 0$, donc $s = e$.
- À haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil. On a donc $s = 0$.

En conclusion, il s'agit d'un filtre passe bas.

2 - Calcul de la fonction de transfert :
On est en RSF, on utilise donc les grandeurs complexes $\underline{s}$, $\underline{e}$, et les impédances $\underline{Z}_C = 1/(\mathrm{j}C\omega)$ pour le condensateur et $\underline{Z}_R = R$ pour la résistance.
On utilise un diviseur de tension :

$$\begin{aligned}
\underline{e} &= \underline{s} \times \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} \\
&= \underline{s} \times \frac{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}}{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + R} \\
&= \underline{s} \times \frac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega} \\
&= \underline{s} \times \frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}},
\end{aligned} \tag{6}$$

en posant $\omega_0 = 1/(RC)$ (c'est bien homogène car RC est homogène à un temps).
On a donc

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}}. \tag{7}$$

3 - Calcul du module et de l'argument :

$$\begin{aligned} |\underline{H}| &= \frac{|1|}{|1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \arg\underline{H} &= \arg(1) - \arg\left(1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}\right) \\ &= 0 - \arctan\frac{\omega}{\omega_0}. \end{aligned} \tag{9}$$

(On peut utiliser la formule avec arctan car la partie réelle du nombre complexe (qui vaut 1 ici) est positive strictement.)

4 - Diagramme de Bode en gain et en phase :
Il s'agit des graphes de la partie IV.2.2 (filtre passe bas d'ordre 1).
Pour les tracer il faut d'abord étudier le comportement asymptotique de $\underline{H}$:

- Pour $\omega = 0$, on a tout simplement $\underline{H}(\omega = 0) = 1$.

  Donc le module tend vers 1 et l'argument vers $\arg(1) = 0$.

  Le gain en décibel tend vers $G_0 = 20\log|\underline{H}(\omega = 0)| = 20\log(1) = 0$.

- Pour $\omega \to +\infty$ (donc en fait pour $\omega/\omega_0 \gg 1$), on a :

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}} \\ &\simeq \frac{1}{\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}} \\ &= -\mathrm{j}\frac{\omega_0}{\omega}. \end{aligned} \tag{10}$$

  On a donc $|\underline{H}| \simeq \omega_0/\omega$, et $\arg\underline{H} \simeq \arg(-\mathrm{j}) + \arg(\omega_0/\omega) = -\pi/2 + 0 = -\pi/2$.

  Le gain en décibel vaut $G = 20\log|\underline{H}| = 20\log(\omega_0/\omega) = -20\log\omega + 20\log\omega_0$: on a une pente de -20dB/décade.

$\rightsquigarrow$14

1.
- Pour $\omega \simeq 0$, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, il n'y a donc pas de passage du courant : $i = 0$.
- Pour $\omega \to +\infty$, la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert, il n'y a donc pas de passage du courant : $i = 0$.

2. $i(t) = I_m\cos(\omega t + \varphi)$ est représenté par $\underline{i}(t) = \underline{I}_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ avec $\underline{I}_m = I_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$.

3. L'impédance de l'ensemble du circuit est $\underline{Z} = \mathrm{j}L\omega + R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}$.

On a donc $\underline{E}_m = \underline{Z}\underline{I}_m$, d'où

$$\begin{aligned}
\underline{I}_m &= \frac{E_m}{\mathrm{j}L\omega + R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}} \\
&= \frac{E_m}{R + \mathrm{j}\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)} \\
&= \frac{E_m/R}{1 + \mathrm{j}\left(\dfrac{L\omega}{R} - \dfrac{1}{RC\omega}\right)} \\
&= \frac{E_m/R}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}
\end{aligned}$$

La dernière ligne est la forme canonique, avec laquelle on identifie. On a donc $\dfrac{Q}{\omega_0} = \dfrac{L\omega}{R}$, et $Q\omega_0 = \dfrac{1}{RC\omega}$.

En manipulant le tout on arrive à $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\boxed{Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}.}$

Enfin, en posant $x = \omega/\omega_0$, on arrive à l'expression $\boxed{\underline{I}_m = \dfrac{E_m/R}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}.}$

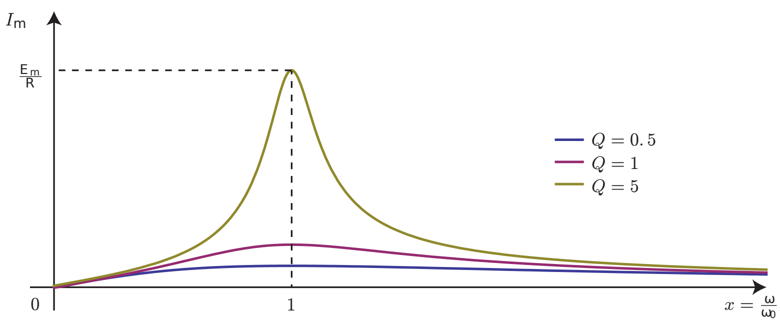
4. L'amplitude (réelle) du courant est donc

$$\boxed{I_m = |\underline{I}_m| = \frac{E_m/R}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2}}.}$$

La résonance en intensité a lieu si I_m est maximal.

C'est le cas si le dénominateur est minimal, ce qui arrive lorsque $x = 1$ (car alors le terme en $(x - 1/x)^2$ est nul, et étant toujours positif il ne peut pas être inférieur à 0, c'est donc son minimum).

La résonance a donc lieu pour $\boxed{\omega = \omega_0.}$



Remarque : La résonance a toujours lieu. C'est différent du cas de la résonance en tension (tension aux bornes du condensateur), qui n'a lieu que si le facteur de qualité est supérieur à une certaine valeur ($1/\sqrt{2}$).

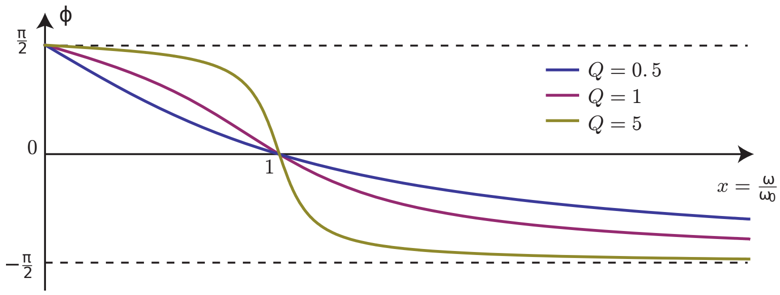
5. On a
$$\begin{aligned}\varphi = \varphi_i - \varphi_e & \\ &= \arg(\underline{I}_m/E_m) \\ &= \arg\left(\frac{1/R}{1+\mathrm{j}Q\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}\right) \\ &= \arg(1/R) - \arg\left(1+\mathrm{j}Q\left(x-\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= 0 - \arctan\frac{Q\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}{1} \\ & \boxed{\varphi = -\arctan\left(Q\left(x-\frac{1}{x}\right)\right).}\end{aligned}$$

(on rappelle que si $a>0$, alors l'argument de $a+\mathrm{j}b$ est $\arctan(b/a)$.)

Pour $x\to 0$: $-1/x$ tend vers $-\infty$, donc l'arctangente vers $-\pi/2$, donc φ vers $\pi/2$.

Pour $x\to +\infty$: cette fois l'argument de l'arctangente tend vers $+\infty$, le tout tend donc vers $-\pi/2$.

Pour $x=1$: $\varphi = 0$.



6. La bande passante est l'intervalle de pulsations pour lesquelles $I_m \leq \dfrac{I_{m,\max}}{\sqrt{2}}$.

Ici $I_{m,\max} = \dfrac{E_m}{R}$.

On voit graphiquement qu'on va toujours pouvoir définir un tel intervalle de pulsations. Il se situera entre les deux pulsations pour lesquelles on a $I_m = \dfrac{I_{m,\max}}{\sqrt{2}}$.

Ceci est équivalent à $Q^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2 = 1$, soit tous calculs faits et en éliminant les solutions négatives, pour

$$x_1 = -\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{4+\frac{1}{Q^2}}, \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{4+\frac{1}{Q^2}}.$$

La largeur de la bande passante est $\Delta x = x_2 - x_1 = \dfrac{1}{Q}$, soit encore $\boxed{\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}.}$

Remarque : On a $\varphi = \pm\pi/4$ pour x_1 et x_2.

7. On a $\boxed{A_c = Q}$ ici.

8. $\boxed{\omega_0 = 6.7\times 10^5\,\mathrm{rad/s}, \quad A_c = Q = 0.33}$ $\boxed{\Delta\omega = 2\times 10^5\,\mathrm{rad/s}.}$