Partie V : électromagnétisme
Chapitre 5

TD – Ondes électromagnétiques

Remarque : exercice avec $\star$: exercice particulièrement important, à maîtriser en priorité (de même que les exemples de questions de cours des “ce qu'il faut savoir faire”) | [$\bullet\circ\circ$] : difficulté des exercices

I Reconnaître une direction de propagation, une polarisation rectiligne $\star$ | [$\bullet\circ\circ$]

On considère les ondes suivantes :

a - $\vec{E}(M,t) = E_0\,(\vec{e}_x - 2\vec{e}_y)\,\cos(\omega t - kz + \varphi)$

b - $\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0\,\mathrm{e}^{j\pi/2}\,(\vec{e}_x - 2\vec{e}_y)\,\exp\{j(\omega t - kz)\}$

c - $\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0\,\mathrm{e}^{j\pi/2}\,(\vec{e}_x + \vec{e}_z)\,\exp\{j(\omega t - kx)\}$

d - $\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0\,(\vec{e}_x - j\vec{e}_y)\,\exp\{j(\omega t - kz)\}$

1 - Dans chacun des cas, indiquer la direction de propagation de l'onde, puis dire s'il s'agit d'une OPPM polarisée rectilignement ou non et si c'est le cas donner la direction de polarisation.

2 - Dans le cas numéro 2, donner l'expression du champ électrique réel, et celle du champ magnétique.

3 - Dans le cas numéro 4, donner l'expression du champ électrique réel. Montrer que la pointe du vecteur $\vec{E}$ décrit un cercle dans le plan Oxy. Dans quel sens ?

4 - On considère l'onde donnée par $\vec{E}(M,t) = E_0\,(\vec{e}_x - \vec{e}_y)\,\cos(\omega t - q(x+y))$.

Est-elle une onde plane ? On répondra en donnant l'équation des surfaces d'onde.

Donner l'expression du vecteur d'onde $\vec{k}$, ainsi que la direction de propagation.

S'agit-il d'une polarisation rectiligne ? La direction de polarisation est-elle compatible avec celle de propagation ?

II Équation de propagation avec sources [$\bullet\bullet\circ$]

Montrer (à partir des équations de Maxwell) qu'en présence de sources ρ et $\vec{j}$, on a les équations de propagation suivantes :

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\frac{\rho}{\epsilon_0} + \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}, \qquad \Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \mu_0\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{j}.$$

III Propagation dans un milieu ohmique [$\bullet\bullet\circ$]

Dans ce problème, on s'intéresse à la propagation d'ondes dans un milieu ohmique de conductivité γ.

1 - a - En utilisant l'équation de conservation de la charge, montrer que l'on a la relation

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0}\rho = 0$$

b - Résoudre cette équation en prenant comme condition initiale un excès de charges au point M : $\rho(M,0) = \rho_0$.

c - En déduire que dans un milieu ohmique, tout excès de charge local ρ_0 est atténué en un temps de l'ordre de $\tau = \dfrac{\epsilon_0}{\gamma}$.

Application numérique pour un métal : $\gamma = 10^7\,\mathrm{S/m}$, et $\epsilon_0 = 8.9\times10^{-12}\,\mathrm{F/m}$.

Comparer à la fréquence d'une onde électromagnétique dans le visible.

En conclusion, pour les fréquences considérées, on supposera dans la suite que $\rho = 0$ dans le conducteur ohmique.

2 - L'équation de Maxwell-Ampère comporte deux termes : le courant $\vec{j}$, et ce que l'on appelle parfois le courant de déplacement $\vec{j}_D = \epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

a - Écrire l'équation de Maxwell-Ampère en faisant apparaître ces deux courants.

b - On souhaite comparer leurs ordres de grandeur pour en négliger un des deux. On considère que le champ électrique est celui d'une OPPM de pulsation ω.

Montrer que l'on a alors, en termes d'amplitudes, $\left\|\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\| \simeq \omega \|\vec{E}\|$.

En déduire que $\dfrac{\|\vec{j}_D\|}{\|\vec{j}\|} \simeq \omega\tau$, puis que l'on peut négliger j_D devant j pour des fréquences correspondants à la lumière visible ou inférieures.

3 - a - En supposant que $\vec{j}_D = \vec{0}$ et que $\rho = 0$ dans le conducteur ohmique, montrer que les équations de Maxwell mènent à :

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\,\gamma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{1}$$

La forme de cette équation vous rappelle-t-elle une autre équation célèbre, rencontrée plus tôt dans l'année ?

4 - On envoie maintenant sur le conducteur une onde électromagnétique. Dans le vide, avant le conducteur, le champ électrique est donné par $\vec{E}(M,t) = E_0\,\vec{e}_x\,\cos(\omega t - kz)$.

L'interface vide-conducteur est en $z = 0$.

On cherche l'expression des champs dans le conducteur.

a - Montrer que le champ $\vec{E} = E_t \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\vec{e}_x$ est solution de l'équation 1, à condition que $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$.

b - Tracer l'allure de l'amplitude de l'onde dans le conducteur.

c - δ est appelé la profondeur de peau du conducteur. Quelle est sa signification physique ?
L'évaluer pour un métal avec $\gamma = 10^7\,\mathrm{S/m}$, et $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$ pour une fréquence de 500 kHz (ondes hertziennes), de 10^{15} Hz (optique).
Conclusion ?

d - Dans la limite où $\gamma \to \infty$, que peut-on considérer dans le conducteur ?

IV Puissance rayonnée par une OPPM ★ | [● ○ ○]

On considère un laser utilisé en TP. La puissance de la lumière émise est de l'ordre de 1 mW, et on retiendra donc $\langle\mathcal{P}\rangle = 1.0\,\mathrm{mW}$. La lumière émise est quasi-monochromatique, avec une longueur d'onde $\lambda = 633\,\mathrm{nm}$. Le faisceau est cylindrique, de rayon $r = 0.5\,\mathrm{mm}$, et on suppose l'intensité lumineuse uniforme dans une section droite.

1 - a - On suppose que l'onde émise est une OPPM polarisée rectilignement.
Proposer un repère cartésien adapté au problème, et donner l'expression des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ qui convient.

b - En déduire l'expression de la puissance moyenne transmise à travers toute une section droite du faisceau.

c - En déduire la valeur des champs électriques et magnétiques.

2 - Donner le nombre de photons émis par seconde par le laser.

3 - Donner la densité de photons au sein du faisceau (nombre de photons par unité de volume).

V Puissance rayonnée par une onde sphérique [● ○ ○]

On considère un émetteur d'ondes électromagnétiques que l'on assimile à une source ponctuelle. Il peut s'agir d'une antenne émettrice de radio ou télévision, d'un signal envoyé par un satellite, etc.
L'onde émise est sphérique, du type $\vec{E}(M,t) = \dfrac{A}{r}\cos(\omega t - kr)\,\vec{e}_\theta$ (on utilise les coordonnées sphériques). On peut montrer qu'une telle expression est bien solution de l'équation de d'Alembert pour $\vec{E}$, et que le champ magnétique associé vérifie la même relation que pour une OPPM dans le vide.

1 - Rappeler cette relation (qui lie $\vec{B}$, $\vec{E}$ et $\vec{k}$).

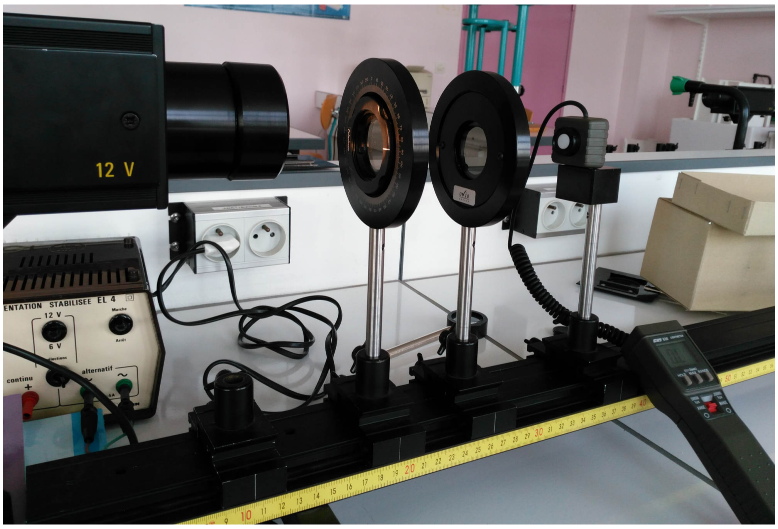
2 - Ici $\vec{k} = k\vec{e}_r$. En déduire l'expression du champ $\vec{B}$, puis du vecteur de Poynting.

3 - Exprimer ensuite la valeur moyenne de vecteur de Poynting, puis la valeur moyenne de la puissance rayonnée à travers une sphère de rayon r centrée sur l'émetteur.

Conclure sur la nécessité d'une décroissance en $1/r$ des champs.

VI Polariseur et analyseur, loi de Malus ⋆ | [• ∘ ∘]

On réalise l'expérience suivante : sur un banc optique, on place successivement une source de lumière blanche, un filtre interférentiel de longueur d'onde λ_0, et un polariseur d'axe $\vec{e}_x$. L'axe optique est repéré par l'axe z.



Exemple de montage. Il manque le filtre interférentiel.

1 - Quel est le rôle du filtre interférentiel ?

2 - En sortie du polariseur, on peut considérer que la lumière est décrite par une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde λ_0 et polarisée rectilignement.

Donner l'expression de $\vec{E}_1(M,t)$ du champ électrique après le polariseur en fonction de ω, k, t et z, et d'une amplitude E_0 et d'une phase à l'origine φ.

Quel est la relation entre k et λ_0 ? Et entre ω et k ?

3 - On place, après le polariseur, un autre polariseur dont la direction passante $\vec{\alpha}$ fait un angle θ avec l'axe y. On note $\vec{\beta}$ le vecteur tel que $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{e}_z)$ soit orthogonal direct.

On appelle ce second polariseur l'analyseur. On s'intéresse à l'intensité de la lumière après cet analyseur.

- **a -** Écrire le champ $\vec{E}_1$ dans la base $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{e}_z)$, et en déduire l'expression du champ électrique $\vec{E}_2(M,t)$ après l'analyseur.
- **b -** En déduire l'expression du vecteur de Poynting, puis que l'intensité I reçue par un détecteur placée après l'analyseur est proportionnelle à $E_0^2 \sin^2\theta$. Il s'agit de la loi de Malus.
- **c -** On souhaite vérifier expérimentalement cette loi. On réalise donc le montage décrit dans cet exercice. Quelles mesures réaliser ? Que faut-il tracer en fonction de quoi si on souhaite vérifier la loi à l'aide d'une régression linéaire ?

VII Étude d'un condensateur en régime variable [• • ○]

On considère un condensateur, constitué de deux plaques conductrices cylindriques (rayon a) en regard l'une de l'autre, séparées d'une distance d par du vide. On place un axe z orienté vers le haut. L'armature supérieure porte une charge surfacique $\sigma(t)$, et l'armature inférieure une charge surfacique $-\sigma(t)$.
On impose une différence de tension $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ entre les plaques. Cette dépendance temporelle fait que l'on ne peut pas utiliser les résultats de l'électrostatique. On s'attend en particulier à la présence d'un champ magnétique suite à la présence des variations temporelles de charges.

1 - On se place dans le domaine de l'ARQS. En considérant que la longueur pertinente est d, exprimer le domaine de fréquences dans lequel l'ARQS est valable.

A.N. pour $d = 0.5\,\mathrm{mm}$.

2 - Dans le cadre de l'ARQS dit ARQS électrique, le champ électrique est donné par les mêmes relations qu'en électrostatique. On a donc $\vec{E}_0 = -\dfrac{\sigma(t)}{\epsilon_0}\vec{e}_z$.

En revanche le champ magnétique doit être obtenu à partir des équations de Maxwell.

- **a -** Rappeler les équations donnant le rotationnel et la divergence de $\vec{B}$, et les écrire pour le cas de l'espace inter-armatures.
- **b -** On peut voir avec ces équations que le fait que $\vec{E}_0$ varie va créer un champ $\vec{B}_1$. On note $\vec{j}_D = \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}_0}{\partial t}$, que l'on appelle le courant de déplacement. On peut ainsi traiter $\vec{j}_D$ comme s'il s'agissait d'une distribution de courants habituelle, et en particulier appliquer le théorème d'Ampère.

  En analysant les symétries et invariances de $\vec{j}_D$, en déduire la direction et les coordonnées dont dépend $\vec{B}_1$.
- **c -** À l'aide du théorème d'Ampère, déterminer l'expression du champ magnétique dans l'espace inter-armatures et en dehors.
- **d -** On note u_B la valeur maximale prise par la densité volumique d'énergie magnétique, et u_E la valeur maximale prise par la densité volumique d'énergie électrique. On considèrera qu'en RSF, on a $\sigma(t) = \sigma_0 \cos(\omega t + \phi)$.

  Afin d'être dans l'ARQS électrique et de pouvoir utiliser l'expression électrostatique du champ électrique, il faut que $u_B \ll u_E$.

  Montrer que ceci est équivalent à une condition d'ARQS où la longueur intervenant est a.