Partie V : électromagnétisme
Chapitre 3

Correction – TD – Formulation de l'électromagnétisme : équations de Maxwell

I Vrai-faux / questions courtes ★ | [• ○ ○]

1 - Boule chargée et divergence :

a - On sait que le champ électrique en dehors de la boule est donné par $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$, avec $\vec{e}_r$ le vecteur des coordonnées sphériques.

Les lignes de champs sont donc radiales. Elles partent de la boule si $\rho > 0$, et elles vont vers la boule si $\rho < 0$.

b - Ce sens est compatible avec l'équation de Maxwell-Gauss : par exemple si $\rho > 0$, alors $\operatorname{div} \rho = \rho/\epsilon_0 > 0$, donc les lignes de champs sortent d'un petit volume entourant la charge.

2 - a - Faux.

Par exemple en électrostatique on peut considérer une charge ponctuelle q. On a alors $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r$ dans tout l'espace. Donc $\vec{E}$ est non nul, alors même que $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\epsilon_0 = 0$ partout (sauf au point où est la charge).

En magnétostatique on a toujours $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, et pourtant il y a de nombreuses situations où $\vec{B} \neq 0$ (heureusement !).

b - Faux.

En électrostatique on a toujours $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = 0$, et pourtant il y a de nombreuses situations où $\vec{E} \neq 0$ (heureusement !).

En magnétostatique on peut considérer un fil rectiligne infini parcouru par un courant I. On a alors $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$ dans tout l'espace. Donc $\vec{B}$ est non nul, alors même que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} = \vec{0}$ partout (sauf en un point du fil).

II Calcul de ρ connaissant $\vec{E}$ ★ | [• ○ ○]

1 - On utilise l'équation de Maxwell-Gauss, mais pour exprimer ρ puisque l'on connaît $\vec{E}$: $\rho = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}$

Ici on a $\vec{E} = E_x(x)\vec{e}_x$, donc $\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x}$.

Ainsi pour $x > a$ et $x < a$, on a $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, et donc $\rho = 0$.

Pour $-a \leq x \leq a$, on a $\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{E_0}{a}$, donc $\rho = \dfrac{\epsilon_0 E_0}{a}$.

III Existence du potentiel électrostatique [• • ○]

IV Conservation de la charge déduite des équations de Maxwell [● ○ ○]

1 - Équation locale de conservation de la charge : $\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{x,y,z} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$.

2 -

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{(Maxwell-Gauss)} \\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div} \vec{E}\right) &= \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t} \\
\operatorname{div}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) &= \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t} \\
\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} - \frac{1}{\mu_0\epsilon_0}\mu_0 \vec{j}\right) &= \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad \text{(Maxwell-Ampère)} \\
\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B}\right) - \frac{1}{\epsilon_0}\operatorname{div} \vec{j} &= \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t} \\
0 - \frac{1}{\epsilon_0}\operatorname{div} \vec{j} &= \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad \text{car } \forall \vec{A},\ \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{A}) = 0 \\
&\boxed{0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}.}
\end{aligned}$$

V Équation de Poisson ⋆ | [● ○ ○]

1 - a est en mètres.

2 - La situation est stationnaire, on a donc l'équation de Poisson : $\Delta V + \dfrac{\rho}{\epsilon_0} = 0$.

On a donc $\rho = -\epsilon_0 \Delta V$, et il faut calculer le laplacien de V.

En coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}
\Delta V &= \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_{x,z} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_{x,y} \\
&= \frac{V_0}{a^2}(2 + 2 - 4) \\
&= 0
\end{aligned}$$

On a donc $\rho = 0$.

3 - On place une particule de charge positive en O. On s'intéresse à la force qu'elle subit et à la stabilité de cette position.

a - Sur l'axe Ox : $V = V(x,0,0) = \dfrac{V_0}{a^2}x^2$, soit une parabole avec un minimum en 0.

Sur l'axe Oy : $V = V(0,y,0) = \dfrac{V_0}{a^2}y^2$, soit une parabole avec un minimum en 0.

Sur l'axe Oz : $V = V(0,0,z) = -\dfrac{2V_0}{a^2}z^2$, soit une parabole avec un maximum en 0.

b - $\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, V = \dfrac{V_0}{a^2}2x\vec{e}_x + \dfrac{V_0}{a^2}2y\vec{e}_y - \dfrac{V_0}{a^2}4z\vec{e}_z$,

donc en O on a $x = y = z = 0$ et ainsi $\vec{E}(O) = \vec{0}$.

c - La particule placée en O est soumise à une force $q\vec{E} = \vec{0}$, la position O est donc une position d'équilibre.

Pour savoir si elle est stable ou non, il faut regarder l'allure de l'énergie potentielle de la charge, qui est qV.

Si $q > 0$, la concavité de V regardé selon l'axe z montre que la position d'équilibre est instable.

VI Équation de Laplace, cage de Faraday [● ○ ○]

1 - La situation est statique et il n'y a pas de charges dans le volume : on peut utiliser l'équation de Laplace pour le potentiel, $\Delta V = 0$.

$V = V_0$ satisfait bien $\Delta V = 0$ (car V et constant, donc ces dérivées sont nulles), et satisfait également les conditions aux limites.

2 - Non, cette solution ne dépend pas de la valeur et de la distribution du champ électrique en dehors du volume.

3 - Lorsque l'on place un système sensible (comme les composants d'un ordinateur) dans une cage de Faraday, ceux-ci sont protégés des perturbations électromagnétiques extérieures. Ceci car la valeur du potentiel dans la cage ne dépend pas de ce qu'il se passe en dehors de la cage.