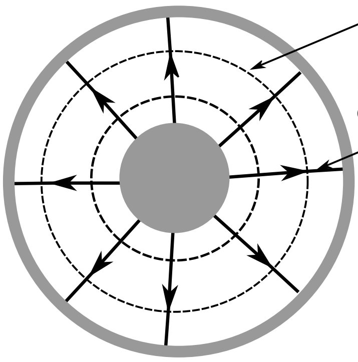
Partie V : Électromagnétisme
Chapitre 1

Correction – DM 15 – Capacité d'un câble coaxial

1 - Charge totale présente sur l'âme : $\sigma_1 \times 2\pi R_1\, L$. Charge totale présente sur la gaine : $\sigma_2 \times 2\pi R_2\, L$.
Ces charges sont opposées, donc on a $R_1\sigma_1 = -R_2\sigma_2$.

2 -
- Symétries : On considère un point M quelconque (situé entre l'âme et la gaine).
  Le plan contenant l'axe z et le point M est plan de symétrie de la distribution de charges.
  De même pour le plan perpendiculaire à l'axe z et passant par M (car on considère un câble de longueur infinie).
  Or $\vec{E}$ est dans les plans de symétrie de la distribution de charge. Il est donc dans ces deux plans. On a donc $\boxed{\vec{E}(M) = E_r(M)\vec{e}_r}$ avec $\vec{e}_r$ le vecteur radial des coordonnées cylindriques d'axe z (et pas sphériques comme dit dans l'énoncé).
- Invariances : La distribution de charges est invariante par translation selon l'axe z. $E_r(M)$ ne dépend donc pas de z.
  La distribution de charges est invariante par rotation autour de l'axe z (angle θ). $E_r(M)$ ne dépend donc pas de θ.
  On a donc $\boxed{\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r}$.

3 -



4 - (Sur la copie, il est recommandé de faire un schéma faisant apparaître la surface de Gauss.)

- Choix de la surface de Gauss : Soit un point M situé à une distance r de l'axe. On prend un cylindre d'axe z, de rayon r, de longueur arbitraire h. Il passe par le point M. On note S la surface (fermée) du cylindre.
- Expression du flux de $\vec{E}$ à travers S : On décompose la surface S en la somme de la surface latérale S_{lat} du cylindre (de normale $\vec{e}_r$), la surface S_{g} qui ferme le cylindre à gauche (de normale $-\vec{e}_z$), et la surface S_{d} qui ferme le cylindre à droite (de normale $+\vec{e}_z$).

$$\begin{aligned}\Phi_{\vec{E}} &= \oiint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}\\ &= \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{E}\cdot\vec{e}_r\mathrm{d}S + \iint_{S_{\text{g}}} \vec{E}\cdot(-\vec{e}_z)\mathrm{d}S + \iint_{S_{\text{d}}} \vec{E}\cdot\vec{e}_z\mathrm{d}S\end{aligned}$$

Or $\vec{E}$ est selon $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_r\cdot\vec{e}_z = 0$, donc il reste uniquement l'intégrale sur S_{lat} :

$$\begin{aligned}\Phi_{\vec{E}} &= \iint_{S_{\text{lat}}} E_r(r)\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r\mathrm{d}S\\ &= E_r(r)\iint_{S_{\text{lat}}} \mathrm{d}S\\ &= E_r(r)\,2\pi r\,h.\end{aligned}$$

- Calcul de Q_{int} : à l'intérieur de cette surface de Gauss, le seul endroit où il y a des charges est sur l'âme. On a donc $Q_{\text{int}} = h\,2\pi R_1\,\sigma_1$.
- Application du théorème de Gauss : on a $\Phi_{\vec{E}} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$, soit $E_r(r)\,2\pi r\,h = \dfrac{h\,2\pi R_1\,\sigma_1}{\epsilon_0}$.

  On en déduit $E_r(r) = \dfrac{R_1\sigma_1}{\epsilon_0 r}$, et enfin

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{R_1\sigma_1}{\epsilon_0 r}\,\vec{e}_r.}$$

5 - On a $U = V(R_1) - V(R_2) = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}$.

Pour cette dernière intégrale, on prend un chemin qui va en ligne droite de l'âme à la gaine. On a donc $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r$.

D'où

$$\begin{aligned}
U &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{R_1\sigma_1}{\epsilon_0 r}\,\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r\mathrm{d}r \\
&= \frac{R_1\sigma_1}{\epsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{R_1\sigma_1}{\epsilon_0}\,[\ln r]_{R_1}^{R_2} \\
&= \frac{R_1\sigma_1}{\epsilon_0}\,(\ln(R_2) - \ln(R_1)) \\
&\boxed{U = \frac{R_1\sigma_1}{\epsilon_0}\,\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}
\end{aligned}$$

6 - L'armature positive est l'âme. Elle porte une charge $Q = L\,2\pi R_1\,\sigma_1$.

On a donc pour la capacité : $\boxed{C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{2\pi\epsilon_0\,L}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)}.}$

7 - La capacité linéique (ou par unité de longueur) du câble est $\boxed{C_{\text{lin}} = \dfrac{C}{L} = \dfrac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)}.}$

Application numérique : $\boxed{C_{\text{lin}} = 61\,\text{pF/m}.}$