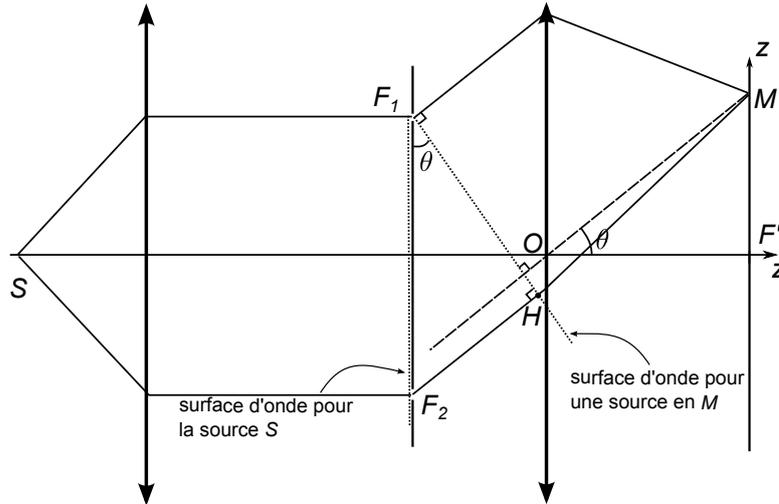


### Problème I – Mesure d'épaisseur par interférométrie

Extrait de écrit PT physique A 2017, quelques modifications (questions 1 et 2 plus détaillées)

#### I.1 – Système interférentiel à deux fentes

- Il s'agit de fentes, mais on fera comme s'il s'agissait de trous. On sait que cela revient au même. On raisonne uniquement dans le plan de la feuille.



★  $S_1$  et  $S_2$  sont sur la même surface d'onde pour une source en  $S$  (théorème de Malus), on a donc  $(SS_1) = (SS_2)$ .

★  $F_1$  et  $H$  sont sur la même surface d'onde pour une source en  $M$  (théorème de Malus et principe du retour inverse de la lumière), on a donc  $(F_1M) = (HM)$ .

★ Finalement il reste  $\delta_M = (SF_1M) - (SF_2M) = -(F_2H) = -F_2H = -\sin \theta \times 2a \simeq -2a\theta$ .

★ Or on a  $\theta \simeq \tan \theta = \frac{z}{f'}$ .

On a donc finalement  $\delta_M = -\frac{2az}{f'}$ .

★ Enfin, le déphasage entre 1 et 2 est donné par  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta_M$ , et on a  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\varphi$ .

D'où  $\varphi = -2\pi\frac{az}{\lambda_0 f'}$ .

- L'amplitude totale en  $M$  est donnée par

$$\underline{s}(M) = \underline{s}_1 + \underline{s}_2 = s_0 e^{j\varphi} + s_0 e^{-j\varphi} = 2s_0 \cos \varphi.$$

L'éclairement est alors

$$\begin{aligned} E(M) &= |\underline{s}|^2 \\ &= 4s_0^2 \cos^2 \varphi \\ &= 2s_0^2(1 + \cos(2\varphi)) \end{aligned}$$

$$E(M) = 2E_0(1 + \cos(2\varphi))$$

$$E(M) = 2E_0 \left( 1 + \cos \left( 2\pi \frac{2az}{\lambda_0 f'} \right) \right).$$

On identifie l'interfrange  $i$  par en comparant à  $\cos\left(\frac{2\pi}{i}z\right)$ , on a donc  $i = \frac{\lambda_0 f'}{2a}$ .

Allure : voir cours. C'est un cosinus qui oscille entre 0 et  $4E_0$  avec une période  $i$ .

## I.2 – Système interférentiel à trois fentes

3. Le rayon fictif précédent n'est plus fictif, l'amplitude totale en  $M$  est donc

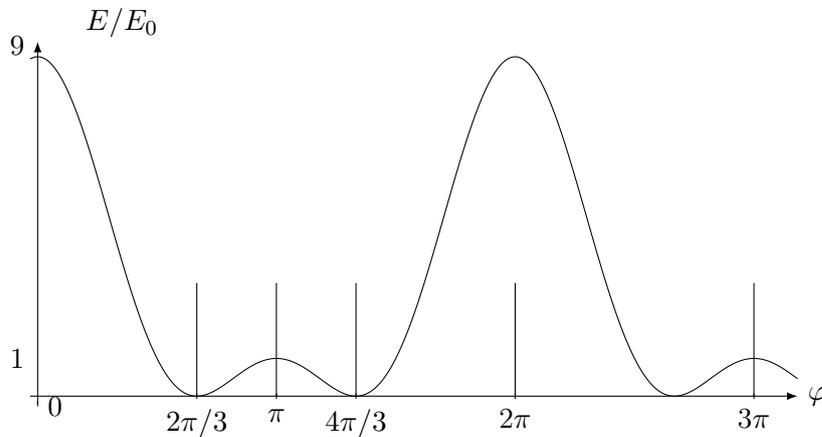
$$\underline{s}(M) = s_0 e^{j\varphi} + s_0 + s_0 e^{-j\varphi} = s_0 + 2s_0 \cos \varphi.$$

L'éclairement est alors  $E(M) = \underline{s}\underline{s}^* = E_0(1 + 2 \cos \varphi)^2$ .

4.

$\varphi$ en rad	0	$2\pi/3$	$\pi$	$4\pi/3$	$2\pi$
$\cos \varphi$	1	$-1/2$	$-1$	$-1/2$	1
$E/E_0$	9	0	1	0	9

5.



6. Si l'épaisseur de la lame est telle qu'elle induit un retard de phase de  $\pi/2$  pour le rayon central, alors l'amplitude en  $M$  est

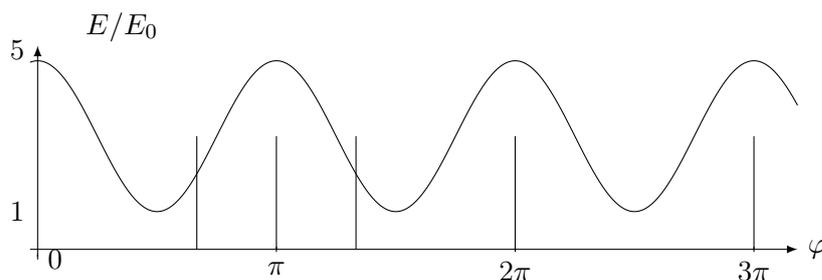
$$\underline{s}(M) = s_0 e^{j\varphi} + s_0 e^{j\pi/2} + s_0 e^{-j\varphi} = s_0 j + 2s_0 \cos \varphi.$$

L'éclairement est alors

$$\begin{aligned} E(M) &= \underline{s}\underline{s}^* \\ &= s_0^2 (1 + 4 \cos^2 \varphi) \\ &= E_0 \left( 1 + 4 \frac{\cos(2\varphi) + 1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$E(M) = E_0 (3 + 2 \cos(2\varphi)).$$

On a bien une alternance de franges sombres et claires.



7. Un déphasage de  $\Delta\varphi = \pi/2$  est équivalent à une différence de marche  $\delta_M = \frac{\lambda_0}{2\pi} \times \Delta\varphi = \frac{\lambda_0}{4}$ .

Or la différence de marche induite par le passage de la lame est  $\delta_M = ne - e$ .

Il faut donc  $(n-1)e = \frac{\lambda_0}{4}$ , soit  $\lambda_0 = 4(n-1)e = 600 \text{ nm}$ .

**Remarque :** On a la même chose si  $\Delta\varphi = \pi/2 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , donc si  $\delta_M = \frac{\lambda_0}{4} + k\lambda_0$  et donc si  $\lambda_0 = \frac{4(n-1)e}{4k+1}$ .

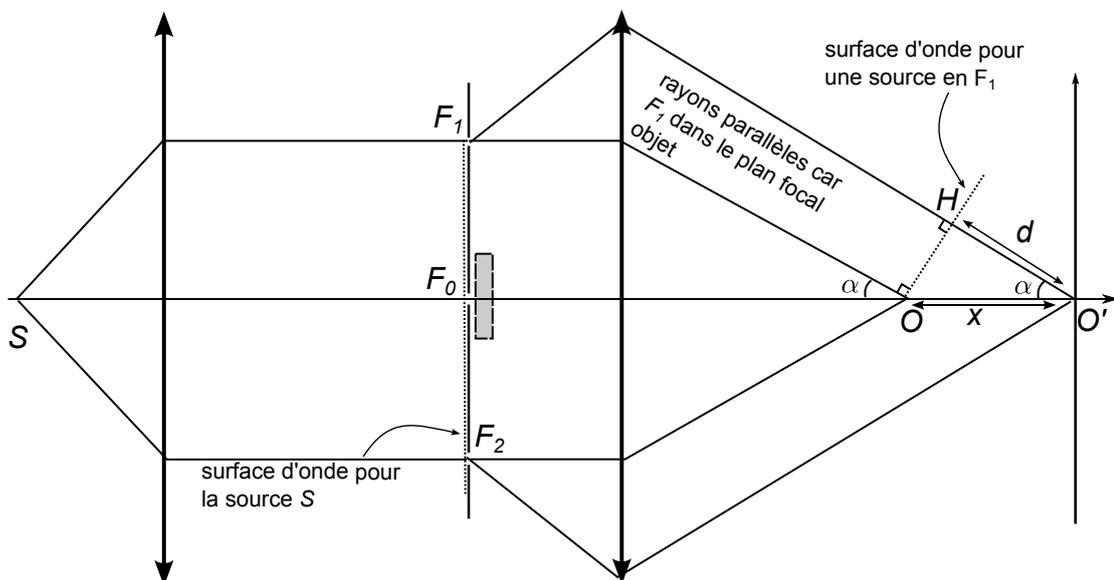
8. Si les trois rayons sont en phase en  $O'$ , c'est que l'on a  $(F_0O') = (F_1O') = (F_2O')$ .

L'égalité  $(F_1O') = (F_2O')$  est évidente par symétrie. On doit donc voir à quelle condition on a  $(F_0O') = (F_1O')$ . Pour cela, on cherche à exprimer l'un en fonction de l'autre :

$$\begin{aligned} (F_0O') &= (F_0O) + x \\ &= (F_0O)_{\text{sans lame}} + (n-1)e + x \\ &= (F_1O) + (n-1)e + x \quad \text{car sans la lame on avait } (F_0O) = (F_1O) \\ &= (F_1H) + (n-1)e + x \quad \text{car } OH \text{ surface d'onde pour une source en } F_1 \\ &= (F_1O') - d + (n-1)e + x \\ &= (F_1O') - x \cos \alpha + (n-1)e + x \\ &= (F_1O') - x(1 - \alpha^2/2) + (n-1)e + x \\ &= (F_1O') + x\alpha^2/2 + (n-1)e. \end{aligned}$$

Donc on a  $(F_0O') = (F_1O')$  à condition que  $x\alpha^2/2 + (n-1)e = 0$ , soit donc que  $x = -\frac{2(n-1)e}{\alpha^2}$ .

Écrit dans l'autre sens, on a donc  $e = -\frac{\alpha^2 x}{2(n-1)}$ .



On utilise  $\alpha \simeq \frac{a}{f'}$ . On a donc  $e = -\frac{a^2 x}{2(n-1)f'^2} = 10 \text{ nm}$ .

**Remarque :** En revanche, on n'a pas du tout montré, comme l'affirme l'énoncé, que "on peut déplacer l'écran d'une distance  $x = \overline{OO'}$ , de façon à retrouver la même figure d'interférence que celle qu'on avait en l'absence de lame"...

## Problème II – Eau oxygénée et propulsion

Extrait de écrit TSI CCP physique 2016

### II.1 – Concentration d'une eau oxygénée

**II.1.a**  $Z$  donne le nombre de protons dans le noyau, et donc également le nombre d'électrons pour un atome neutre.

$A$  donne le nombre de nucléons dans le noyau (donc de protons + neutrons).

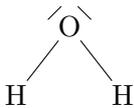
On a donc ici, pour l'hydrogène H : 1 proton, 1 électron.

Et pour l'oxygène O : 8 protons,  $16 - 8 = 8$  neutrons, 8 électrons.

**II.1.b** Hydrogène H :  $1s^1$ . Il y a un électron de valence :  $1s^1$ . Lewis :  $\text{H}\cdot$

Oxygène O :  $1s^2 2s^2 2p^4$ . Il y a six électrons de valence :  $2s^2 2p^4$ . Lewis :  $\langle \text{O} \cdot$

**II.1.c** Schémas de Lewis :



Prenons un atome d'hydrogène d'hydrogène dans la molécule d'eau. Il est entouré d'un doublet, et possède donc deux électrons : la règle du duet est satisfaite.

Prenons l'atome d'oxygène de la molécule d'eau. Il est entouré de 4 doublets, il possède donc 8 électrons : la règle de l'octet est vérifiée.

**II.1.d** ★ Dans  $\text{H}_2\text{O}$  :  $\boxed{\text{n.o.}(\text{H}) = +\text{I}, \text{n.o.}(\text{O}) = -\text{II}}$  (cas classique, pas d'exception ici).

Dans  $\text{O}_2$  :  $\boxed{\text{n.o.}(\text{O}) = 0}$  (en posant  $x = \text{n.o.}(\text{O})$ , on a  $2x = 0$  donc  $x = 0$ ).

Dans  $\text{H}_2\text{O}_2$  :  $\text{n.o.}(\text{H}) = +\text{I}$  (cas classique), mais un n.o. de  $-\text{II}$  est impossible pour O car sinon on aurait une charge totale de  $2 \times 1 + 2 \times (-2) = -2$ , or  $\text{H}_2\text{O}_2$  est neutre. Il faut donc poser  $x = \text{n.o.}(\text{O})$ , on a  $2 \times 1 + 2x = 0$ , donc  $x = -1$ , d'où  $\boxed{\text{n.o.}(\text{O}) = -\text{I}}$ .

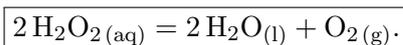
★ Il y a donc existence du couple  $\text{H}_2\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$ , où le n.o. de l'oxygène est de  $-\text{I}$  dans l'oxydant  $\text{H}_2\text{O}_2$  et de  $-\text{II}$  dans le réducteur  $\text{H}_2\text{O}$ .

★ Il y a également existence du couple  $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}_2$ , où le n.o. de l'oxygène est de 0 dans l'oxydant  $\text{O}_2$  et de  $-\text{I}$  dans le réducteur  $\text{H}_2\text{O}_2$ .

**II.1.e** Couple  $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}_2$  :  $\boxed{\text{O}_2(\text{g}) + 2\text{H}_{(\text{aq})}^+ + 2\text{e}^- = \text{H}_2\text{O}_2(\text{aq})}$ .

Couple  $\text{H}_2\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$  :  $\boxed{\text{H}_2\text{O}_2(\text{aq}) + 2\text{H}_{(\text{aq})}^+ + 2\text{e}^- = 2\text{H}_2\text{O}(\text{l})}$ .

On somme les deux demi-équations afin d'éliminer les électrons. On obtient :



**II.1.f** Une dismutation est une réaction dans laquelle une même espèce chimique est consommée en jouant à la fois le rôle d'oxydant et de réducteur.

Une réaction de médiamutation est la réaction inverse.

Ici on est en présence d'une dismutation, car  $\text{H}_2\text{O}_2$  joue à la fois le rôle d'oxydant et de réducteur.

**II.1.g** On peut placer les deux couples sur l'échelle des  $E^0$  (on place l'oxydant à gauche, le réducteur à droite). La règle du gamma est alors respectée, et on en déduit que la réaction (3) sera thermodynamiquement favorisée dans le sens direct (son  $K^0$  est grand devant 1).

**II.1.h** Prenons un volume  $V$  de solution. La masse de cette solution est  $m = (\mu d)V$ , avec  $\mu$  la masse volumique de l'eau et  $d$  la densité de la solution.

La masse de  $\text{H}_2\text{O}_2$  dans cette solution est donc  $m_{\text{H}_2\text{O}_2} = x(\mu d)V$  avec  $x = 3\%$ .

La quantité de matière de  $\text{H}_2\text{O}_2$  est  $n = \frac{m_{\text{H}_2\text{O}_2}}{M_{\text{H}_2\text{O}_2}} = \frac{x\mu dV}{M_{\text{H}_2\text{O}_2}}$ .

Et la concentration est  $C = \frac{n}{V}$ , soit  $C = \frac{x\mu d}{M_{\text{H}_2\text{O}_2}} = 0.92 \text{ mol/L}$ .

(Attention pour l'A.N. à mettre  $M$  en kg/mol, et au fait que le résultat est en mol/m<sup>3</sup> par défaut.)

## II.2 – Décomposition de l'eau oxygénée

**II.2.a** La vitesse de la réaction est  $v = kC(t)$  car on fait l'hypothèse d'un ordre 1 par rapport à l'eau oxygénée.

Et on sait également que  $\frac{dC}{dt} = \frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]}{dt} = \nu_i v$ , avec  $\nu_i = -2$  le coefficient stœchiométrique de  $\text{H}_2\text{O}_2$ .

On a donc  $\frac{dC}{dt} = -2kC(t)$ .

D'autre part, la vitesse de disparition de  $\text{H}_2\text{O}_2$  est  $v_{\text{disp,H}_2\text{O}_2} = -\frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]}{dt} = -\frac{dC}{dt}$ .

On a donc  $v_{\text{disp,H}_2\text{O}_2} = 2kC(t)$ .

$k$  est en s<sup>-1</sup>.

**II.2.b**  $\frac{dC}{dt} = -2kC(t)$ .

**II.2.c** Solution :  $C(t) = C_0 e^{-2kt}$ .

**II.2.d** Le temps de demi-réaction est défini par la relation  $C(t_{1/2}) = C_0/2$ .

On a donc  $C_0 e^{-2kt_{1/2}} = C_0/2$ , soit  $t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{2k} = 1.73 \times 10^2 \text{ s}$ , soit 2 min et 53 s.

**II.2.e** On ne peut pas commenter grand chose...

## II.3 – Propulseur à eau oxygénée

**II.3.a** On utilise la loi de Hess. On obtient  $\Delta_r H^0(298\text{K}) = -196 \text{ kJ/mol}$ .

Le signe négatif indique que la réaction est exothermique, ce qui implique que l'on peut s'en servir comme carburant (il y aura donc potentiellement montée en température et en pression).

**II.3.b** Tableau d'avancement, en moles :

	$2 \text{H}_2\text{O}_2(l)$	$= 2 \text{H}_2\text{O}(g)$	$+ \text{O}_2(g)$
E.I.	1	0	0
$\xi$	$1 - 2\xi$	$2\xi$	$\xi$
E.F. ( $\xi = \xi_{\text{max}} = 0.5$ )	0	1	0.5

Dans l'état final, le réactif est épuisé car on indique que la réaction est totale. L'avancement est donc maximal. Il est donné par l'épuisement du réactif, soit  $1 - 2\xi_{\text{max}} = 0$ , donc  $\xi_{\text{max}} = 0.5$ . On complète alors les deux cases pour les produits dans l'E.F.

**II.3.c** On considère le système {ensemble des composants physico-chimiques}. La transformation est un avancement  $\xi_{\max}$  de la réaction. On la suppose ici isotherme et isobare (même si ce n'est pas le cas en pratique, on fait ceci pour calculer le transfert thermique que la réaction fournirait dans de telles conditions).

★ Réaction chimique d'avancement  $\xi_{\max}$ , isotherme à 25°C :  $\Delta H = \xi_{\max} \Delta_r H^0$ .

★ Premier principe version isobare et  $p = p_{\text{ext}}$  :  $\Delta H = Q_{\text{reçu}} = -Q_{\text{cédé}}$ .

★ On a donc  $Q_{\text{cédé}} = -\xi_{\max} \Delta_r H^0$ .

Application numérique avec  $\xi_{\max} = 0.5 \text{ mol}$  (ce qui correspond à 1 mole de  $\text{H}_2\text{O}_2$  consommée) :  $Q_{\text{cédé}} = 98 \text{ kJ}$ .

On a donc un transfert thermique cédé, par mole de  $\text{H}_2\text{O}_2$  consommée,  $Q_m = -\frac{\Delta_r H^0}{2} = 98 \text{ kJ/mol}$ .

Soit, par unité de masse de  $\text{H}_2\text{O}_2$  consommée,  $q = -\frac{\Delta_r H^0}{2M_{\text{H}_2\text{O}_2}} = 2.88 \text{ MJ/kg}$ .

**II.3.d** Le catalyseur accélère la réaction, qui sinon est lente. Il est donc indispensable.

**II.3.e** ★ Le premier principe indique que, entre l'entrée et la sortie d'un système en écoulement stationnaire :

$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = w_i + q,$$

avec  $\Delta h = h_s - h_e$  la variation d'enthalpie massique,  $\Delta e_c = \frac{1}{2}(v_s^2 - v_e^2)$  la variation d'énergie cinétique massique,  $\Delta e_p = g(z_s - z_e)$  la variation d'énergie potentielle de pesanteur,  $w_i$  le travail massique indiqué reçu (travail autre que celui des forces de pression d'admission et de refoulement, donc travail fourni par les parties mobiles dans le système), et  $q$  transfert thermique massique reçu.

★ Pour l'appliquer il faut choisir le système. On prend ici le fluide en écoulement dans la tuyère. On a  $w_i = 0$  car il n'y a pas de parties mobiles dans la tuyère, et  $q = 0$  car la tuyère est calorifugée. On néglige également  $\Delta e_p$ .

On a donc  $\Delta e_c = -\Delta h$ .

Or la température en sortie de tuyère est plus faible que celle en entrée (car les gaz arrivant en entrée ont été chauffés par la réaction chimique précédente). Donc  $\Delta h < 0$ . Donc  $\Delta e_c > 0$ , il y a bien accélération des gaz.

**II.3.f** On a  $\Delta e_c = \frac{1}{2}(v_{\text{gaz,max}}^2 - v_e^2) \simeq \frac{v_{\text{gaz,max}}^2}{2}$ .

D'où  $v_{\text{gaz,max}} = \sqrt{2(h_e - h_s)}$ .

**II.3.g** ★ Si on suppose les gaz parfaits, on a  $h_e - h_s = c_{p,\text{tot}}(T_c - T_f)$  avec  $T_c = 1350^\circ\text{C}$  la température des gaz en entrée de la tuyère (température obtenue grâce à la décomposition exothermique de l'eau oxygénée), et  $T_f = 400^\circ\text{C}$  la température des gaz en sortie de la tuyère.

★ Il faut trouver la capacité thermique *massique* à pression constante  $c_{p,\text{tot}}$  du mélange s'écoulant dans la tuyère, c'est-à-dire du mélange de  $\text{O}_2$  et  $\text{H}_2\text{O}$  produit par la réaction. Attention, les capacités massiques ne s'ajoutent pas, seules les capacités molaires le font. Il faut donc passer par celles-ci.

On considère une mole de  $\text{H}_2\text{O}_2$  consommée, ceci représente une masse

$$m = 1 \text{ mol} \times M_{\text{H}_2\text{O}_2} = 34.02 \text{ g}.$$

Ceci produit 0.5 mole de  $\text{O}_2$  et 1 mole de  $\text{H}_2\text{O}$ , soit une capacité thermique totale

$$C_{\text{tot}} = 0.5 \text{ mol} \times C_{p,m}(\text{O}_2(\text{g})) + 1 \text{ mol} \times C_{p,m}(\text{H}_2\text{O}(\text{g})).$$

On a donc

$$c_{p,\text{tot}} = \frac{C_{\text{tot}}}{m} = \frac{0.5C_{p,m}(\text{O}_2(\text{g})) + C_{p,m}(\text{H}_2\text{O}(\text{g}))}{M_{\text{H}_2\text{O}_2}} = 2.33 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

★ On obtient alors  $v_{\text{gaz,max}} = \sqrt{2c_{p,\text{tot}}(T_c - T_f)} = 2104 \text{ m/s}$ .

**II.3.h** L'énergie coûteuse est ici le transfert thermique fourni par kg d'eau oxygénée consommée, et

l'énergie utile est l'énergie cinétique massique en sortie du dispositif. On a donc bien  $\eta = \frac{v_{\text{gaz}}^2}{2q}$ .

Ici on a  $\eta = 0.77$ .

Il s'agit d'un rendement maximal car on a effectué un certain nombre d'hypothèses idéales (tuyère calorifugée,  $T_c = 1350^\circ\text{C}$  donnée par un raisonnement de température de flamme (et même supérieur... voir remarques), gaz parfaits).

**II.3.i** D'après 3.c, la réaction de décomposition de l'eau oxygénée fournit un transfert thermique massique  $q = 2.88 \text{ MJ/kg}$  (par kg d'eau oxygénée consommée).

Pour avoir la puissance associée, il faut utiliser  $P_{\text{th}} = D_m \times q$ , avec  $D_m$  le débit massique d'eau oxygénée.

On a ici  $D_m = \frac{\mu_{\text{H}_2\text{O}_2} \times 2V_{\text{H}_2\text{O}_2}}{\Delta t} = \frac{2 \times 19.0 \text{ L}}{21.0 \text{ s}}$  (il y a deux bouteilles).

D'où  $P_{\text{th}} = \frac{2q \mu_{\text{H}_2\text{O}_2} V_{\text{H}_2\text{O}_2}}{\Delta t} = 7.50 \text{ MW}$ .

**II.3.j**  $\eta_{\text{réel}} = \frac{1.10 \text{ MW}}{7.50 \text{ MW}} = 0.15$ . C'est bien inférieur au rendement théorique maximal de 0.77, ce qui est normal car il s'agit du système réel (tuyère non calorifugée, réaction pas nécessairement totale, température  $T_c$  en fin de combustion inférieure, gaz non parfaits, etc...).

**Remarque :**

- Dans la question 3.c on a supposé que la réaction est isobare isotherme. Ce n'est pas le cas en pratique, la chaleur dégagée par la réaction sert justement à chauffer le mélange réactionnel lui-même. Ceci serait donc une étape fictive dans un raisonnement thermodynamique, par exemple de calcul de température de flamme. Cette température de flamme correspondrait aux  $T_c = 1350^\circ\text{C}$  de l'énoncé, température des gaz avant leur entrée dans la tuyère.
- Le rendement calculé en question 3.h est un peu étrange, car on a calculé  $v_{\text{gaz,max}}$  sans se servir de la valeur de  $q$ , mais en utilisant la valeur  $T_c = 1350^\circ\text{C}$  donnée dans l'énoncé. Mais à quoi correspond cette température? À la température mesurée dans le système réel? Si c'est le cas, alors  $\eta$  correspond à un mélange entre un rendement expérimental et un rendement théorique. Ou bien à une température calculée par un raisonnement simplifié?

Voyons ce que cela donnerait en théorie. Avec un raisonnement classique de calcul de température de flamme on obtient pour la température du mélange après réaction chimique :

$$\begin{aligned} T_{\text{max}} &= T_i - \frac{\xi_{\text{max}} \Delta_r H^0}{\xi_{\text{max}} C_{p,m}(\text{O}_2(\text{g})) + 2\xi_{\text{max}} C_{p,m}(\text{H}_2\text{O}(\text{g}))} \\ &= T_i - \frac{0.5 \Delta_r H^0}{0.5 C_{p,m}(\text{O}_2(\text{g})) + C_{p,m}(\text{H}_2\text{O}(\text{g}))} \\ &= 1261^\circ\text{C} \end{aligned}$$

(On a pris  $T_i = 25^\circ\text{C}$ .) C'est différent de la température  $T_c = 1350^\circ\text{C}$  donnée dans l'énoncé, en étant (étonnamment) légèrement inférieur.

On obtient alors  $v_{\text{gaz,max}} = 2003 \text{ m/s}$ , et  $\eta = 0.70$ .

- On peut d'ailleurs, en utilisant l'expression de  $T_{\max}$  ci-dessus, obtenir des expressions complètes. On a, en passant les calculs :

$$v_{\text{gaz,max}}^2 = 2 \frac{C_{p,m,tot}}{M_{\text{H}_2\text{O}_2}} (T_{\max} - T_f) = \dots = 2q - 2c_{p,tot}(T_f - T_i),$$

avec  $T_i$  température initiale du mélange (avant réaction chimique, 25°C ici), et  $T_f$  température du mélange en sortie de la tuyère (400°C ici).

Puis :

$$\eta = \frac{v_{\text{gaz,max}}^2}{2q} = 1 - \frac{c_{p,tot}(T_f - T_i)}{q}.$$

On voit donc mieux pourquoi le rendement n'est pas égal à 1 : c'est parce qu'une partie de l'énergie  $q$  fournie par la réaction chimique sert non pas à accélérer les gaz, mais à échauffer les gaz de leur température initiale  $T_i$  à leur température finale  $T_f$ .

Si  $T_i = T_f$ , on a  $\eta = 1$ .

Enfin, on peut s'étonner du fait que si  $T_i > T_f$ , on a  $\eta > 1$ . Mais c'est parce dans ce cas on n'exploite pas uniquement  $q$ , mais aussi le refroidissement de  $T_i$  à  $T_f$  : le rendement est alors mal défini.

## Problème III – Débitmètres

Extrait de écrit TSI CCP physique 2016

### III.1 – L'effet Venturi

**III.1.a** Un fluide parfait peut être défini comme un fluide de viscosité nulle. Il n'adhère pas aux parois, et la vitesse dans une section droite est donc uniforme.

**III.1.b** On a  $D_m = \mu \pi R_E^2 v_E$ . D'où  $v_E = \frac{D_m}{\mu \pi R_E^2} = 2.39 \text{ m/s}$ .

**III.1.c** L'écoulement étant stationnaire, le débit massique se conserve.

On a donc  $\mu \pi R_E^2 v_E = D_m = \mu \pi R_S^2 v_S$ , d'où  $v_S = v_E \times \frac{R_E^2}{R_S^2} = 9.55 \text{ m/s}$ .

**III.1.d** La relation de Bernoulli s'applique pour un écoulement parfait, incompressible et stationnaire, entre deux points d'une même ligne de courant.

Elle indique alors que la quantité  $\frac{p}{\mu} + \frac{1}{2}v^2 + gz$  est constante entre ces deux points.

L'axe  $z$  est vers le haut.

**III.1.e** Les hypothèses précédentes sont réunies ici. On a donc, le long d'une ligne de courant entre  $E$  et  $S$  :

$$\frac{p_E}{\mu} + \frac{1}{2}v_E^2 + gz_E = \frac{p_S}{\mu} + \frac{1}{2}v_S^2 + gz_S.$$

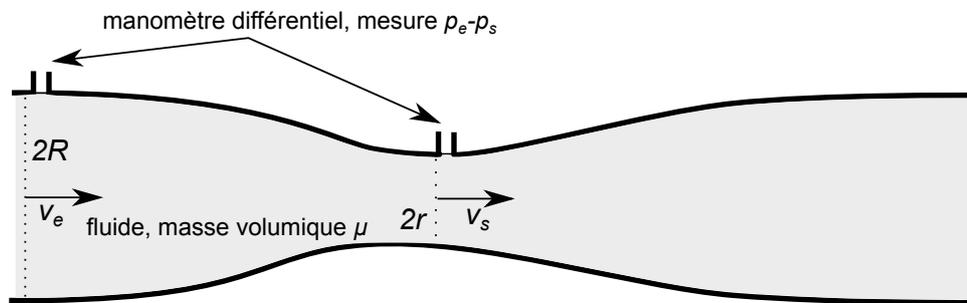
Or  $z_S = z_E$ ,  $v_E = \frac{D_m}{\mu \pi R_E^2}$  et  $v_S = \frac{D_m}{\mu \pi R_S^2}$ , d'où :

$$\Delta p = p_S - p_E = \frac{D_m^2}{2\pi^2\mu} \left( \frac{1}{R_E^4} - \frac{1}{R_S^4} \right).$$

**III.1.f** Si  $R_S < R_E$ , on a d'après l'expression précédente  $\Delta p < 0$ , donc  $p_S < p_E$ .

**III.1.g**  $\Delta p = -4.27 \times 10^4 \text{ Pa} = -0.43 \text{ bar}$ .

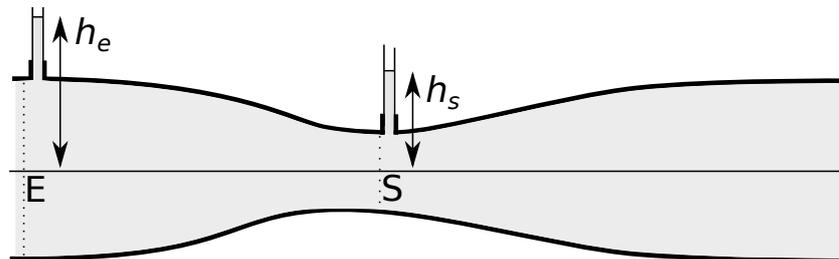
**III.1.h** On utilise le dispositif schématisé ci-dessous.



D'après la formule précédente on obtient le débit massique, et donc le débit volumique  $q = D_m/\mu$ ,  
 via :  $q = \sqrt{\frac{2\pi^2(p_e - p_s)}{\mu(R^{-4} - r^{-4})}}$ .

### III.1.i Plusieurs possibilités :

- On place des tubes horizontaux et on mesure la différence de hauteur d'eau.



Il faut en pratique que le diamètre de la conduite soit négligeable devant la hauteur dans les tuyaux horizontaux, afin de négliger la variation de pression sur une section droite de la conduite (ou alors que l'écoulement soit laminaire, pour que la loi de l'hydrostatique s'applique horizontalement).

On a alors, avec la loi de l'hydrostatique appliquée dans les tuyaux horizontaux :  $p_e = p_0 + \mu g h_e$ ,  $p_s = p_0 + \mu g h_s$ , et ainsi  $p_e - p_s = \mu g (h_e - h_s)$ .

- On utilise un tube en U avec un liquide au fond.
- On utilise un manomètre différentiel (qui mesure la déformation d'une membrane qui sépare un compartiment à  $p_e$  et un autre à  $p_s$ , à l'aide de jauges de contraintes par exemple). C'est plutôt ceci qui est utilisé industriellement.

## III.2 – Débitmètre à turbine

**III.2.a** Si  $q$  est constant, il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Les solutions sont du type solution particulière, soit  $\omega_P = \frac{K_1 \mu q}{K_2}$ , plus solution de l'équation homogène, soit  $\omega_H = A e^{-K_2 q t}$ .

Donc  $\omega(t) = \frac{K_1 \mu q}{K_2} + A e^{-K_2 q t}$  avec  $A$  une constante dépendant de la condition initiale.

Ce serait une solution de type régime transitoire, lors d'un échelon de débit par exemple (ouverture ou fermeture d'un robinet).

**III.2.b** Oui, car on voit typiquement une charge ou une décharge exponentielle, comme prédit par l'équation précédente. Et également car l'équation précédente décrit effectivement la réponse  $\omega(t)$  suite à un échelon de débit.

**III.2.c** D'après l'équation (10) du sujet,  $\omega$  doit être constant si on veut  $q$  proportionnel à  $\omega$ . On a

$$\text{alors } \omega = \frac{K_1 \mu}{K_2} q.$$

C'est aussi le cas sur la figure.

Suite à un changement de débit  $q$ ,  $\omega$  revient à une valeur constante au bout de quelques  $\tau = \frac{1}{K_2 q}$ .

**III.2.d** Le volume d'eau consommé est l'intégrale de  $q(t)$ , donc l'aire sous la courbe  $q(t)$ .

Le volume mesuré via la vitesse de rotation est l'intégrale de  $\omega(t)$ , donc l'aire sous la courbe  $\omega(t)$  (à une constante multiplicative près qui permet de faire coïncider les deux courbes en régime permanent).

On voit qu'à l'ouverture, l'aire sous la courbe  $\omega$  est inférieure à celle sous la courbe  $q$  : on sous estime la consommation.

Au contraire à la fermeture, l'aire sous la courbe  $\omega$  est supérieure à celle sous la courbe  $q$  : on surestime la consommation.

Au final, on peut estimer que lors d'une ouverture puis fermeture du robinet ces deux erreurs se compensent plus ou moins.

**III.2.e** L'équation 10 est  $\frac{d\omega}{dt} = K_1\mu q^2 - K_2q\omega$ .

On suppose ici que  $q(t) = q_0 + q_1 \cos(2\pi ft)$ .

L'équation 10 étant non linéaire en  $q$ , on n'aura pas  $\omega(t) = \omega_0 + \omega_1 \cos(2\pi ft + \varphi)$ .

On peut néanmoins supposer que c'est le cas, au premier ordre, si la fluctuation  $q_1$  est  $\ll q_0$ . On a alors aussi  $\omega_1 \ll \omega_0$ .

Pour  $f = 0$ , on a nécessairement la relation du régime stationnaire  $K_1\mu q_0^2 = K_2q_0\omega_0$ , soit  $q_0 = \frac{K_2}{K_1}\omega_0$ .

Si on regarde l'ordre de grandeur des trois termes dans l'équation 10, on a :

- $\frac{d\omega}{dt} \sim 2\pi f\omega_1$
- $K_1\mu q^2 \sim K_1\mu q_0^2$
- $K_2q\omega \sim K_2q_0\omega_0$

On voit dans les ordres de grandeurs que la fréquence intervient seulement dans le premier terme. Les deux termes suivants sont du même ordre de grandeur d'après la relation  $q_0 = \frac{K_2}{K_1}\omega_0$ .

Il faut négliger le premier terme si on veut retrouver la relation de proportionnalité du régime stationnaire.

C'est donc pour  $f$  petit qu'on a bien la relation de proportionnalité du régime stationnaire, et pour  $f$  grand qu'on a un écart important.

(Plus précisément, il faut  $f \ll \frac{K_1\mu q_0^2}{2\pi\omega_1} = \frac{K_2q_0\omega_0}{2\pi\omega_1}$ , avec  $\omega_1$  qui dépend de  $f$ ...)

**III.2.f** La présence du débitmètre perturbe l'écoulement et entraîne une perte de charge. L'intérêt d'un débitmètre rétractable est donc de n'induire ceci que lors d'une mesure de débit, et non pas en permanence.

De plus, ceci use moins le débitmètre.

Enfin, dans un écoulement réel, la vitesse de l'écoulement n'est pas uniforme dans une section droite. Il faut donc placer le débitmètre (qui ici est petit par rapport à la section) à l'endroit où la vitesse est sensiblement égale à la vitesse moyenne de l'écoulement, ceci afin d'obtenir la bonne expression du débit  $D_v = \iint_S v dS = S \times v_{\text{moy}}$ .