

Correction – TD – Électrostatique

I Vrai-faux / questions courtes

★ | [●○○]

- 1 - (V/F) Faux. Par exemple une surface S qui entoure deux charges opposées $+q$ et $-q$ vérifie $\Phi_{\vec{E}} = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = (+q - q)/\epsilon_0 = 0$ d'après le théorème de Gauss, mais le champ \vec{E} n'est nul nulle part dans la surface. C'est simplement que le flux entrant compense exactement le flux sortant.

II Charge intérieure, théorème de Gauss

★ | [●●○]

- 2 - On a maintenant un cylindre chargé en volume de rayon R_1 , et un chargé en surface de rayon R_2 . Tous deux sont infinis, et d'axe z .

On utilise les coordonnées cylindriques.

- a - On suit de très près ce qui a été fait pour la question 1.

La surface est maintenant un cylindre d'axe z , de rayon r , de hauteur arbitraire h . Trois cas sont à distinguer :

- $r < R_1$: $Q_{\text{int}} = \pi r^2 h \rho$
- $R_1 < r < R_2$: $Q_{\text{int}} = \pi R_1^2 h \rho$
- $R_2 < r$: $Q_{\text{int}} = \pi R_1^2 h \rho + 2\pi R_2 h \sigma$

- b - • Étude des symétries :

On considère un point M . Le plan perpendiculaire aux cylindres et passant par M est plan de symétrie de la distribution de charge. Le plan contenant l'axe z et le point M également.

Or \vec{E} appartient aux plans de symétrie de la distribution.

Donc ici \vec{E} est selon le vecteur \vec{e}_r . D'où $\vec{E} = E_r(r, \theta, z) \vec{e}_r$.

- Étude des invariances :

La distribution de charges est invariante par translation selon l'axe z (les cylindres sont infinis), donc E_r ne dépend pas de z .

La distribution de charges est invariante par rotation d'angle θ autour de Oz , donc E_r ne dépend pas de θ .

Finalement on a $\vec{E} = E_r(r) \vec{e}_r$.

- Surface de Gauss :

On place un point M quelconque. La surface de Gauss est un cylindre d'axe Oz , de rayon r , passant par M , et de hauteur h arbitraire.

On exprime le flux de \vec{E} à travers cette surface.

Sur le disque en haut du cylindre, on a $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$. De même sur le disque en bas du cylindre. Donc seul le flux sur la surface latéral est à prendre en compte.

D'où

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} E_r(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = \iint_{S_{\text{lat}}} E_r(r) dS = E_r(r) \iint_{S_{\text{lat}}} dS = E_r(r) 2\pi r h.$$

- c - On applique enfin le théorème de Gauss : $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$.

D'où :

- $r < R_1$: $\vec{E} = E_r(r) \vec{e}_r = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{e}_r$

- $R_1 < r < R_2 : \vec{E} = E_r(r) \vec{e}_r = \frac{\rho R_1^2}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r$
- $R_2 < r : \vec{E} = E_r(r) \vec{e}_r = \frac{R_1^2 \rho + 2R_2 \sigma}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r$

III Condensateur

[● ○ ○]

On modélise un condensateur par deux armatures cylindriques de surfaces S identiques, séparées par du vide d'une distance e . On impose une différence de potentiel U entre les deux.

- 1 - Négliger les effets de bords signifie que l'on se place suffisamment loin des bords pour pouvoir les ignorer. Tout se passe donc comme si les deux plans chargés étaient infinis. C'est donc le cas développé en cours.
- 2 - Voir cours également.
- 3 - Idem.
- 4 - On peut augmenter la capacité en augmentant S , mais ceci entraîne un encombrement plus important pour le condensateur.

On peut également diminuer e . C'est ce qui est fait dans les condensateurs commerciaux. e atteint quelques micromètres, voire moins, grâce à des techniques spéciales.

La limite de ceci est que si e est trop petit, alors le champ E devient grand et dépasse la valeur disruptive : il se produit un arc électrique conducteur qui endommage le condensateur.

La solution est d'utiliser un isolant dont la permittivité diélectrique est égale à $\epsilon_r \epsilon_0$ avec ϵ_r grand. La capacité est alors $C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{e}$. La valeur de E disruptive est en général également augmentée. Un isolant avec une grande permittivité relative ϵ_r est donc souhaitable.

IV Champ créé par une boule chargée non uniformément

[● ● ○]

- 1 - $Q = \frac{8\pi}{15} \rho_0 R^3$.
- 2 - En dehors de la boule : $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$.
- 3 - Dans la boule : $\vec{E} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5R^2} \right) \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{r}{2} \left(5 - \frac{3r^2}{R^2} \right) \vec{e}_r$.

On vérifie que les deux expressions de \vec{E} donnent la même valeur en $r = R$: le champ électrique est continu, ce qui est attendu pour une distribution volumique de charges.

- 4 - $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r$, donc, en dehors de la boule :

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

(on prend une constante d'intégration nulle pour avoir $V = 0$ en l'infini).

Et dans la boule :

$$V = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r^4}{20R^2} - \frac{r^2}{6} \right) + K$$

Pour trouver la constante K on doit imposer la continuité de V en $r = R$:

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{R^4}{20R^2} - \frac{R^2}{6} \right) + K.$$

On trouve alors $K = \frac{\rho_0 R^2}{4\epsilon_0}$.