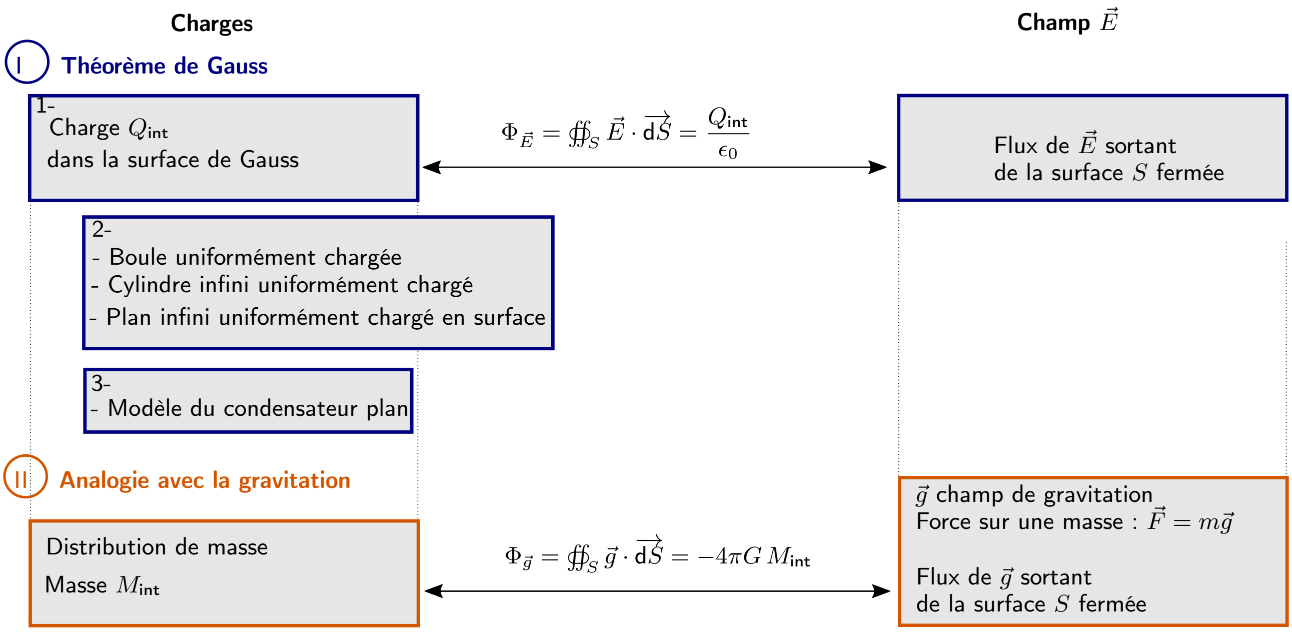
Partie V : électromagnétisme
Chapitre 1.2

Électrostatique : théorème de Gauss

Plan schématique du cours



Plan du cours

Ce qu'il faut connaître

———— (cours : I)

►$_1$ Comment est défini mathématiquement le flux de $\vec{E}$ à travers une surface orientée ? (expression avec une intégrale)

►$_2$ Vers où est orientée la normale à une surface fermée ?

►$_3$ Quel est l'énoncé du théorème de Gauss ?

►$_4$ Que veut-on dire lorsque l'on “néglige les effets de bords ?”

———— (cours : II)

►$_5$ Quelle est l'expression de la force s'exerçant entre deux masses m_1 et m_2 ?
Faire l'analogie avec celle entre deux charges q_1 et q_2. S'en servir pour retrouver le théorème de Gauss version gravitation, qui donne le champ de gravitation $\vec{g}$.

►$_6$ Quelle est l'expression de la force s'exerçant sur une masse m soumise à un champ de gravitation (ou de pesanteur) $\vec{g}$?

Ce qu'il faut savoir faire

Remarque : La liste ci-dessous comporte les savoir faire généraux, ainsi que des exemples concrets de questions qui peuvent être posées. Ces exemples ne sont pas exhaustifs : d'autres questions peuvent aussi être abordées.

——————— (cours : I)

►$_7$ Théorème de Gauss : reconnaître les situations suffisamment symétriques où il est utile, puis s'en servir. Voir la méthode plus loin sur ce poly.

- Établir l'expression du champ électrostatique créé en tout point de l'espace dans les trois cas classiques vus en cours :
  * sphère uniformément chargée en volume,
  * cylindre "infini" uniformément chargé en volume,
  * plan "infini" uniformément chargé en surface.
- TD II.
- On modélise un condensateur par deux plans parallèles uniformément chargés et supposés infinis. Donner l'expression du champ électrique entre les deux plans. Définir puis établir la capacité du condensateur. Voir TD III.

►$_8$ Démontrer qu'à l'extérieur d'une distribution de charge à symétrie sphérique de charge totale Q_{tot}, le champ électrostatique est le même que celui qui serait créé par une charge ponctuelle Q_{tot} placée en son centre.

►$_9$ Décomposer une distribution de charge a priori complexe en somme de distributions plus simples afin de calculer le champ électrique par superposition.

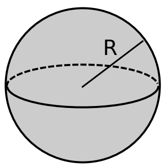
- Exemple avec le cas du condensateur : on le considère comme la somme de deux plans pour lesquels on connait le champ $\vec{E}$ créé.
- TD VI

——————— (cours : II)

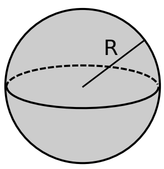
►$_{10}$ Déterminer l'expression d'un champ gravitationnel $\vec{g}$ en utilisant le théorème de Gauss dans le cas de la gravitation.

- TD V

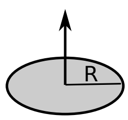
À compléter :



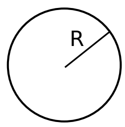
volume d'une boule



aire d'une sphère



aire d'un disque



circonférence d'un cercle

À connaître par cœur.

Méthodes

Méthode : calculer un champ électrique $\vec{E}$
Étudier les possibilités suivantes :

- Voir s'il est possible d'appliquer le théorème de Gauss (voir méthode suivante).
- Voir si on peut calculer directement $\vec{E}$ (charges ponctuelles par exemple).
- Si le potentiel V est donné : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$.
- Voir si on peut décomposer la distribution de charges en somme de distributions plus simples.

Méthode : utiliser le théorème de Gauss

- Choisir un système de coordonnées.
- Étudier les symétries de la distribution de charges : prendre un point M quelconque, trouver les plans Π et Π^* passant par M.

  On en déduit la direction du vecteur $\vec{E}$ en M.
- Étudier les invariances de la distribution de charges : on en déduit de quelles variables (x, y, r, θ, ...) dépendent les composantes de $\vec{E}$.
- Prendre un point M quelconque. Il faut trouver la bonne surface de Gauss passant par M.

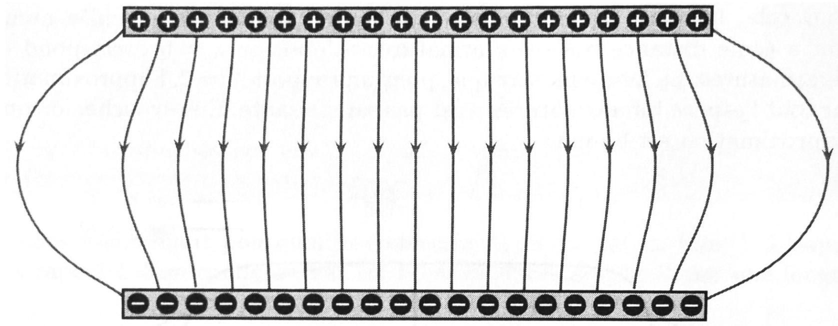
  Cette surface est fermée. Elle doit se décomposer éventuellement en sous surfaces (les faces d'un cube par exemple). Sur chaque sous surface on doit avoir :

  - soit $\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = 0$, la sous surface n'intervient alors pas,
  - soit $\vec{E}$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ colinéaires (pour avoir $\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = E\mathrm{d}S$) et $\|\vec{E}\|$ constant (pour pouvoir le sortir de l'intégrale).
- Une fois la surface de Gauss trouvée :
  - Expression du flux de $\vec{E}$: $\Phi_{\vec{E}} = \oiint \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = ...$
  - Expression de Q_{int} : c'est la charge à l'intérieur de la surface de Gauss. Il y a parfois plusieurs cas à traiter ($r < R$, $r > R$, ...)
  - Théorème de Gauss : $\Phi_{\vec{E}} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$.

Documents associés au cours

I.3 – Modélisation du condensateur plan

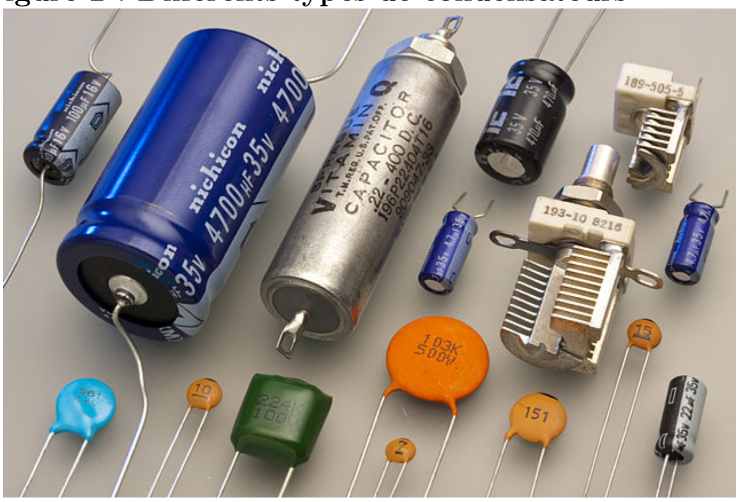
Figure 1 : Lignes de champ pour deux plans de charges opposées

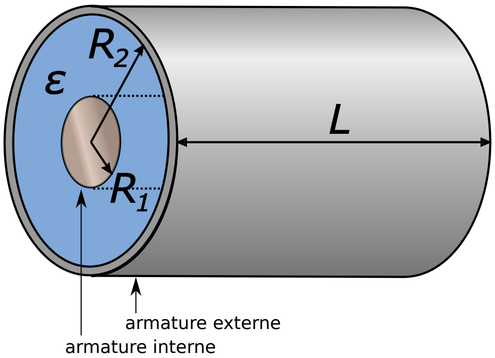


Ceci modélise la situation dans un condensateur. On remarque que "loin" des bords, les lignes de champ sont toutes selon le même axe, ce qui justifie de négliger les effets de bord dans ce domaine de l'espace.

À compléter : tracer quelques équipotentielles.

Figure 2 : Différents types de condensateurs





Gauche : Différents types de condensateurs.

Les gros cylindriques sont électrochimiques, c'est-à-dire qu'il y a un milieu électrolyte entre les deux plaques. Ce milieu possède une permittivité diélectrique $\varepsilon_r \times \varepsilon_0$ avec ε_r grand, et une tension de claquage importante. La couche isolante est formée par une réaction chimique lors de la première mise sous tension du condensateur, et possède une épaisseur e très faible, de l'ordre de quelques molécules. Tout ceci permet d'obtenir une capacité $C = \varepsilon_r \, \varepsilon_0 \dfrac{S}{e}$ importante pour un faible encombrement.

D'autres technologies existent (céramiques, etc.).

Droite : Dans un condensateur cylindrique, les deux armatures sont concentriques. Ceci est analogue au cas du DM (sur le câble coaxial).

(Source : Wikipedia)

II – Analogie avec la gravitation

Électrostatique	**Gravitation**
Force entre deux charges ponctuelles	Force entre deux masses ponctuelles
Champ électrique créé par une charge ponctuelle	Champ de gravitation (ou de pesanteur) créé par une masse ponctuelle
Force sur une charge q dans un champ électrique $\vec{E}$	Force sur une masse m dans un champ de gravitation $\vec{g}$

D'où les analogies suivantes :

Électrostatique	**Gravitation**
Grandeurs	Grandeurs
Constante	Constante
Théorème de Gauss	Équivalent du théorème de Gauss