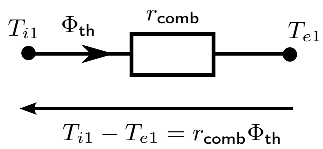
Partie II : Thermodynamique et mécanique des fluides
Chapitre 7

Correction – DM 10 – Transferts thermiques en plongée

1 - a - Le problème est unidimensionnel, le milieu est sans pertes ni sources, on a donc l'équation de la chaleur : $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \kappa \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

Comme le régime est stationnaire, on a $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$. Donc $T = T(x)$, et l'équation de la chaleur devient $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} = 0}$, ce qui s'intègre en $\boxed{T(x) = Ax + B}$.

b - On fait un schéma électrique équivalent.



Il faut donc exprimer le flux thermique passant par l'élément de surface $\mathrm{d}S$ de la combinaison en fonction de $T_{i1} - T_{e1}$, et on en déduira r_{comb}.

⋆ D'après la loi de Fourier,
$$j_{\text{th}} = -\lambda_{\text{comb}} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\lambda A,$$
avec A le coefficient directeur de $T(x)$ (cf question 1).

⋆ Or on a $A = (T_{e1} - T_{i1})/e$ (pente de la droite).

⋆ Donc $j_{\text{th}} = -\lambda_{\text{comb}} \dfrac{T_{e1} - T_{i1}}{e}$, et $\Phi_{\text{th}} = \mathrm{d}S \times j_{\text{th}} = \mathrm{d}S\lambda_{\text{comb}} \dfrac{T_{i1} - T_{e1}}{e}$.

⋆ Par identification, on en déduit que $\boxed{r_{\text{comb}} = \dfrac{e}{\mathrm{d}S\lambda_{\text{comb}}}}$.

2 - Par analogie, on a $\boxed{R_{\text{eau}} = \dfrac{e_e}{\lambda_{\text{eau}} S}}$.

On a $\dfrac{R_{\text{comb}}}{R_{\text{eau}}} = \dfrac{e}{e_e} \dfrac{\lambda_{\text{eau}}}{\lambda_{\text{comb}}} = 7.5$, donc la résistance thermique de la combinaison est 7.5 fois plus grande que celle de la couche d'eau.

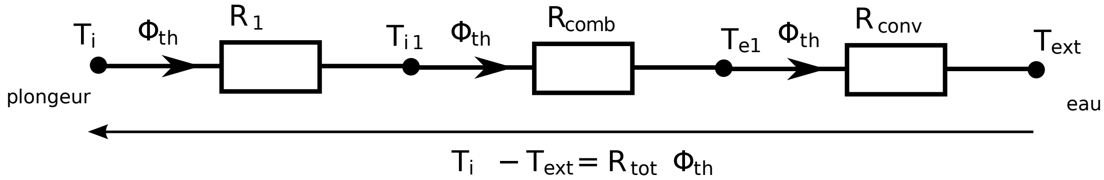
Or ces résistances sont en série. On peut donc négliger R_{eau} devant R_{comb}.

3 - D'après la loi de Newton rappelée dans l'énoncé, le flux thermique allant du plongeur vers l'extérieur est $\Phi_{\text{conv}} = hS \times (T_{e1} - T_{\text{ext}})$, avec T_{e1} la température de la surface externe de la combinaison, et T_{ext} la température du fluide (de l'eau ici).

Or, si on introduit une résistance équivalente R_{conv}, on doit alors écrire $(T_{e1} - T_{\text{ext}}) = R_{\text{conv}} \times \Phi_{\text{th}}$. Ceci ce réécrit $\Phi_{\text{th}} = (T_{e1} - T_{\text{ext}})/R_{\text{conv}}$.

Par identification, on en déduit que $\boxed{R_{\text{conv}} = \dfrac{1}{hS}}$.

4 - Le schéma équivalent est le suivant :

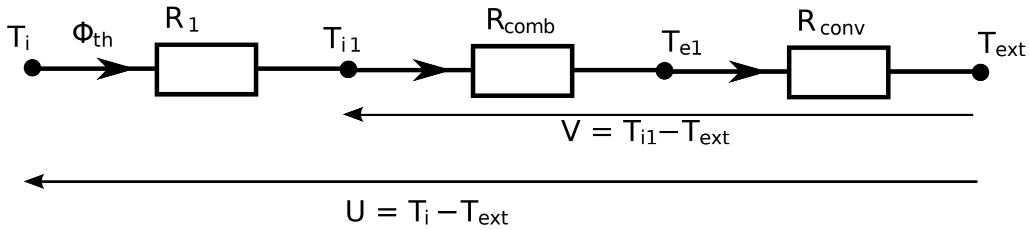


On a $\boxed{R_{\text{tot}} = R_1 + R_{\text{comb}} + R_{\text{conv}} = R_1 + \dfrac{e}{S\lambda_{\text{comb}}} + \dfrac{1}{hS}}$.

On trouve $R_{\text{tot}} = 0.1104\,\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}$, soit $\boxed{R_{\text{tot}} = 0.1\,\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}}$.

Le flux thermique Φ_{th} perdu par le plongeur est donné par la loi d'Ohm (voir le schéma ci-dessus pour ne pas se tromper dans les signes) : $\boxed{\Phi_{\text{th}} = \dfrac{T_i - T_{\text{ext}}}{R_{\text{tot}}}}$.

5 - On utilise un diviseur de tension entre les "tensions" U et V ci-dessous :



on a $V = U \times \dfrac{R_{\text{comb}} + R_{\text{conv}}}{R_{\text{tot}}} = \dfrac{R_2}{R_{\text{tot}}}$.

En remplaçant par les expressions de U et V, on obtient :

$$\boxed{T_{i1} = T_{\text{ext}} + (T_i - T_{\text{ext}})\,\frac{R_{\text{comb}} + R_{\text{conv}}}{R_{\text{tot}}} = 31°\text{C}.}$$

6 - a - Question similaire au refroidissement d'une salle de classe étudiée dans le chapitre 2 de thermodynamique.

On applique le premier principe au système {corps du plongeur} (système fermé, considéré comme une phase condensée incompressible indilatable) pour une évolution entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}U = \delta Q.$$

Il n'y a pas de travail car le volume du système ne varie pas.

⋆ On peut écrire $\mathrm{d}U = C\mathrm{d}T_i$.

⋆ On a également $\delta Q = P_{\text{reçu}}\mathrm{d}t - P_{\text{perdu}}\mathrm{d}t$, avec ici $P_{\text{reçu}} = P_{\text{th}}$ produit par le corps du plongeur, et $P_{\text{perdu}} = \Phi_{\text{th}} = (T_i(t) - T_{\text{ext}})/R_{\text{tot}}$.

⋆ En combinant tout ceci, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}T_i}{\mathrm{d}t} = \frac{P_{\text{th}}}{C} - \frac{T_i(t) - T_{\text{ext}}}{C\,R_{\text{tot}}},$$

$$\text{soit encore}\quad \boxed{\frac{\mathrm{d}T_i}{\mathrm{d}t} + \frac{T_i(t)}{\tau} = \frac{P_{\text{th}}}{C} + \frac{T_{\text{ext}}}{\tau},\quad \text{avec}\quad \tau = C\,R_{\text{tot}} = 9.16\,\text{heures.}}$$

b - La solution générale est la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière.

⋆ Solution de l'équation homogène : $A\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

⋆ Solution particulière : on l'obtient en prenant T_i constant, car alors $\dfrac{\mathrm{d}T_i}{\mathrm{d}t} = 0$. La solution est donc $\tau P_{\text{th}}/C + T_{\text{ext}}$.

⋆ La solution générale est donc $T_i(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + \dfrac{\tau P_{\text{th}}}{C} + T_{\text{ext}}$.

On obtient la constante A grâce à $T_i(t=0) = T_{i0} = 37°\text{C}$: on a donc $T_{i0} = A + \dfrac{\tau P_{\text{th}}}{C} + T_{\text{ext}}$, d'où $A = T_{i0} - \dfrac{\tau P_{\text{th}}}{C} - T_{\text{ext}}$.

⋆ Finalement, $\boxed{T_i(t) = \left(T_{i0} - \dfrac{\tau P_{\text{th}}}{C} - T_{\text{ext}}\right)\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \dfrac{\tau P_{\text{th}}}{C} + T_{\text{ext}}}$.

c - D'après cette expression, la température limite vers laquelle tend le corps du plongeur est

$$\boxed{T_{\text{limite}} = \tau P_{\text{th}}/C + T_{\text{ext}} = R_{\text{tot}}P_{\text{th}} + T_{\text{ext}}.}$$

Elle augmente si R_{tot} augmente, ce qui est normal car alors le corps du plongeur est mieux isolé.

7 - Il faut résoudre l'équation $T_i(t) = T_{\text{hyp}}$ où l'inconnue est t.

On trouve $\boxed{t = \tau \times \ln\left(\dfrac{T_{i0} - T_e - R_{\text{th}}P_{\text{th}}}{T_{\text{hyp}} - T_e - R_{\text{th}}P_{\text{th}}}\right) = 0.20\,\tau = 1.83\,\text{heure.}}$.