

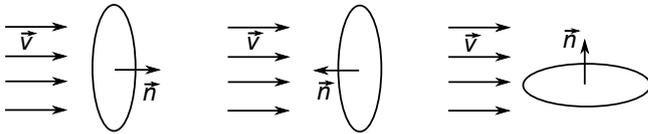
TD – Description d'un fluide en écoulement stationnaire

Remarque : exercice avec ★ : exercice particulièrement important, à maîtriser en priorité (de même que les exemples de questions de cours des “ce qu’il faut savoir faire”) | [●○] : difficulté des exercices

I Vrai-faux/questions courtes

★ | [●○]

- 1 - (V/F) Un écoulement stationnaire est incompressible.
- 2 - (V/F) Un écoulement incompressible n'est pas divergent.
- 3 - (V/F) En régime permanent, le débit volumique dans une conduite est identique pour toute section.
- 4 - (V/F) En régime permanent, le débit massique dans une conduite est identique pour toute section.
- 5 - Donner le signe des débits massiques à travers les surfaces suivantes :



- 6 - Dessiner un champ de vitesses correspondant à un écoulement uniforme. Tracer également des lignes de courant.
- 7 - (V/F) Si les lignes de courant sont uniformes, alors c'est que l'écoulement est uniforme.

II Débit d'une rivière

★ | [●○]

Le débit moyen annuel de la Marne au niveau de Meaux est d'environ $100 \text{ m}^3/\text{s}$, avec une vitesse typique de $0.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- 1 - À quel débit massique ceci correspond-il ?
- 2 - Estimer la section de la rivière à cet endroit.
- 3 - Une mesure sur une carte permet d'estimer à 80 m la largeur de la Marne au niveau de Meaux. En déduire une estimation de la profondeur moyenne de la rivière sur cette section.

III Section d'un jet d'eau qui s'écoule

[●●○]

Lorsqu'on laisse s'écouler l'eau depuis un robinet, on peut remarquer que le diamètre du filet d'eau rétrécit à mesure qu'on s'éloigne du robinet.

- 1 - Pourquoi ?
- 2 - Des mesures sur une photographie montrent qu'après une chute de 21 cm, le diamètre du jet passe de $d_1 = 78$ pixels à $d_2 = 44$ pixels. Que vaut le rapport v_2/v_1 des vitesses qui correspondent ?



IV Calcul de débit

[●●○]

On considère l'écoulement d'un fluide incompressible de masse volumique uniforme dans une conduite circulaire de rayon R .

On suppose d'abord que la vitesse du fluide est constante dans une section droite, égale à $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$.

- 1 - Exprimer le débit volumique à travers une section droite du tuyau, orientée dans le sens de l'écoulement, en fonction de v_0 et de R .

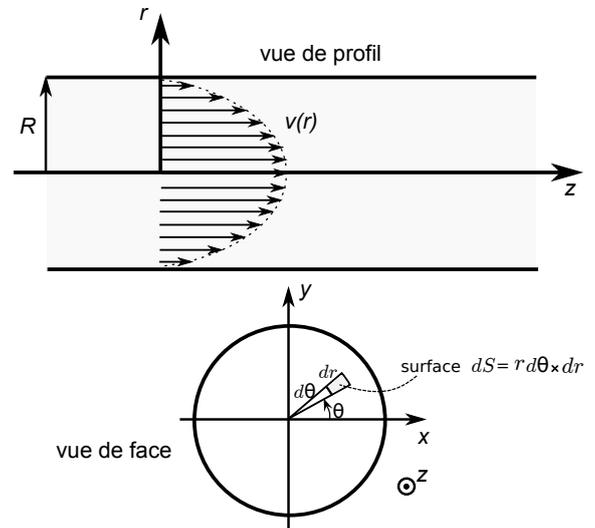
On considère encore la même section. Cette fois, on prend en compte le fait que dans le tuyau, la vitesse du fluide n'est pas uniforme : notamment, l'eau est ralentie au niveau des parois où sa vitesse s'annule, et au centre du tuyau la vitesse est maximale.

On peut montrer, sous des hypothèses raisonnables que l'on verra au chapitre suivant, que la vitesse est de la forme

$$\vec{v} = v(r) \vec{e}_z = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \vec{e}_z.$$

Il s'agit de la loi de Poiseuille. Les coordonnées utilisées sont les coordonnées polaires d'axe z .

Nous allons donc calculer le débit volumique associé à ce profil de vitesse.



- 2 - a - Rappeler l'expression du débit volumique faisant intervenir l'intégrale sur une surface.
 b - Les coordonnées adaptées sont ici les coordonnées polaires. On rappelle que l'élément de surface infinitésimal dans ces coordonnées est $dS = r dr d\theta$. Calculer l'intégrale précédente afin de donner l'expression du débit volumique à travers une section droite du tuyau, orientée dans le sens de l'écoulement, en fonction de v_0 et de R .
 c - Si on souhaite décrire l'écoulement par un écoulement uniforme de vitesse v_{unif} , que doit valoir v_{unif} en fonction du v_0 de la formule de Poiseuille?
- 3 - L'écoulement considéré ici est-il divergent ? Est-il rotationnel ?

V Écoulement sanguin

[●○○]

On modélise l'aorte à la sortie du cœur comme une conduite cylindrique de rayon $r_0 = 1.0$ cm, le débit volumique étant $D_v = 6.0$ L/min. Après l'aorte, le sang est ensuite réparti en N artères. On supposera l'écoulement incompressible.

- 1 - Quelle est la vitesse du sang dans l'aorte ? (On supposera que la vitesse est uniforme sur une section.)

On mesure un débit volumique au niveau d'une artère de $D'_v = 2.0 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. On suppose que ce débit est représentatif du débit moyen au niveau de n'importe quelle artère.

- 2 - Donner une estimation du nombre N d'artères.

VI Cartes de vitesse et caractère divergent ou rotationnel

[●○○]

- 1 - On considère un écoulement d'eau supposée incompressible dans une conduite qui est de plus en plus large. L'écoulement peut-il être divergent ?
- 2 - Sur les trois cas ci-contre, dire si l'écoulement est divergent ou non ou si l'on ne peut pas conclure.

