Devoir Surveillé

Physique-chimie – Correction – DS 3

Le sujet est adapté du sujet G2E 2013, sauf la question 11 (étude du congélateur à l'aide du diagramme) qui a été ajoutée.

I Machines thermiques et principes de la thermodynamique

1 - Moteur : $W < 0$, $Q_C > 0$, $Q_F < 0$.

Réfrigérateur et PAC : $W > 0$, $Q_C < 0$, $Q_F > 0$.

On rappelle que W, Q_F et Q_C sont définis comme étant reçu par le fluide qui circule dans la machine.

2 - $\boxed{\eta = \dfrac{-W}{Q_C}}$, $\boxed{e_{RF} = \dfrac{Q_F}{W}}$, $\boxed{e_{RF} = \dfrac{-Q_C}{W}}$.

3 - a - Système (fermé) : le fluide contenu dans la machine.

Transformation : évolution au cours d'un cycle.

Lors de cette transformation, la variation des grandeurs d'état est nulle : $\Delta U = 0$ et $\Delta S = 0$.

Le premier principe s'écrit donc :

$$\boxed{W + Q_C + Q_F = \Delta U = 0.}$$

Et le second principe : $S_e + S_c = \Delta S = 0$. On a en plus $S_c = 0$ car l'évolution est réversible. Les transferts de chaleur ayant lieu au contact de thermostat, on a $S_e = \dfrac{Q_C}{T_C} + \dfrac{Q_F}{T_F}$. On obtient donc :

$$\boxed{\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = 0.}$$

b - En utilisant les deux relations précédentes, on arrive aux expressions du rendement et des efficacités réversibles :

$$\boxed{\eta_C = 1 - \frac{T_F}{T_C}}, \quad \boxed{e_{RF} = \frac{T_F}{T_C - T_F}}, \quad \boxed{e_{PAC} = \frac{T_C}{T_C - T_F}}.$$

4 - a - On a cette fois

$$\boxed{\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} + \sigma = 0.}$$

b - On a $\eta = \dfrac{-W}{Q_C} = \dfrac{Q_F + Q_C}{Q_C} = 1 + \dfrac{Q_F}{Q_C}$.

Or le second principe que l'on vient d'écrire indique que $\dfrac{Q_F}{Q_C} = -\dfrac{T_F}{T_C} - \dfrac{\sigma T_F}{Q_C}$.

On a donc $\eta = 1 - \dfrac{T_F}{T_C} - \dfrac{\sigma T_F}{Q_C}$, soit : $\boxed{\eta = \eta_C - \dfrac{\sigma T_F}{Q_C}}$.

L'entropie créée étant positive, on a $\eta \leq \eta_C$, avec égalité uniquement en cas d'évolution réversible.

c - D'après les données, on peut calculer $\eta = r\eta_C$. On connaît également W.

- $\star$ En utilisant la définition $\eta = \dfrac{-W}{Q_C}$, on en déduit $\boxed{Q_C = -W/\eta = 19.9\,\mathrm{kJ/cycle}}$.
- $\star$ On utilise ensuite $W + Q_F + Q_C = 0$, d'où $\boxed{Q_F = -W - Q_C = -4.9\,\mathrm{kJ/cycle}}$.
- $\star$ L'entropie créée est alors $\boxed{\sigma = (\eta_C - \eta)\dfrac{Q_C}{T_F} = 3.3\,\mathrm{J/K/cycle}}$.

II Chauffage d'une habitation

5 - L'énergie à fournir pendant t =une heure est $E = \Phi_{th} \times t$.

La masse de bois correspondante vérifie $m_B \times q_B = E = \Phi_{th} \times t$.

On a donc $\boxed{m_B = \Phi_{th} \times t / q_B = 2.4\,\text{kg}}$.

6 - a - D'après la partie I, $\boxed{e_1 = \dfrac{T_C}{T_C - T_F} = 15}$, car ici $T_C = T = 273\,\text{K}$ et $T_F = T_E = 273\,\text{K}$ (attention à bien prendre les températures en kelvins.

b - La puissance à fournir à la PAC est donc $\boxed{P = \Phi_{th}/e_1 = 0.82\,\text{kW}}$.

7 - a - On a $Q_C = Q > 0$, $Q_F < 0$, $Q'_C < 0$, $Q'_F > 0$ et $W > 0$ (s'aider de la partie I si besoin).

b - Par définition, $Q_H = -Q_F - Q'_C$. Il faut exprimer chacun des deux termes.

⋆ Le rendement du moteur est $\eta = \dfrac{W}{Q}$, l'efficacité de la PAC est $e_{PAC} = \dfrac{-Q'_C}{W}$. On a donc $\eta\, e_{PAC} = -\dfrac{Q'_C}{Q}$, et donc $-Q'_C = Q\,\eta\, e_{PAC}$.

On exprimera plus tard η et e_{PAC} en fonction des températures (possible car le fonctionnement est réversible).

⋆ D'autres part, $\eta = \dfrac{Q_F + Q_C}{Q_C} = \dfrac{Q + Q_C}{Q}$, donc on a $Q_F = Q(\eta - 1)$.

⋆ Finalement, $Q_H = Q\,\eta\, e_{PAC} + Q(1 - \eta)$. On utilise ensuite $e_1 = \dfrac{T_H}{T_H - T_E}$ et $\eta = 1 - \dfrac{T_H}{T}$.

Après quelques simplifications on arrive à :

$$\boxed{Q_H = Q\,\frac{T_H}{T}\,\frac{T - T_E}{T_H - T_E}.}$$

c - Pour maintenir le bilan thermique de l'habitation, on doit encore fournir pendant t =1 heure une énergie $Q_H = \Phi_{th} \times t$.

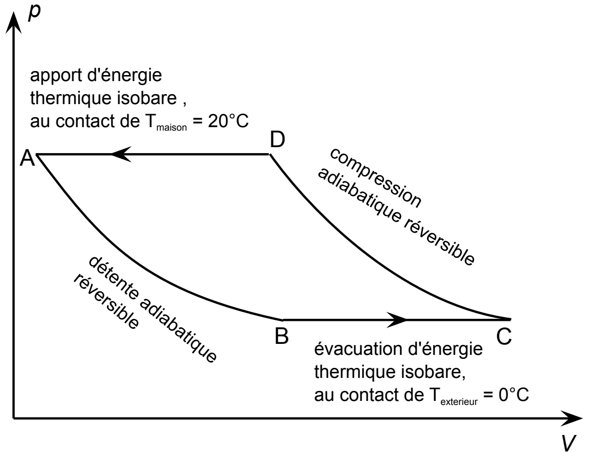
L'énergie thermique fournie par le bois est $Q = Q_H\,\dfrac{T}{T_H}\,\dfrac{T_H - T_E}{T - T_E}$. Elle correspond à une masse de bois telle que $m'_B \times q_B = Q$. On a donc

$$\boxed{m'_B = \frac{\Phi_{th}\,t}{q_B}\,\frac{T}{T_H}\,\frac{T_H - T_E}{T - T_E} = 0.31\,\text{kg}.}$$

Par rapport à $m_B = 2.4\,\text{kg}$, la consommation de bois a été divisée par 7.7.

Remarque : Le gain réel sera moindre, car nous avons supposé ici un fonctionnement réversible, un transfert d'énergie thermique sans perte entre réservoir de bois et moteur, un transfert de travail du moteur à la pompe sans perte, etc.

8 - a - Voir ci-dessous. Le sens est antihoraire, ce qui est normal pour une machine réceptrice.



b - L'évolution $A \to B$ est isentropique et on utilise le modèle du gaz parfait. L'exposant γ ne dépend pas non plus de la température. On a donc la relation de Laplace $T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{cst}$ (que l'on redémontre au brouillon à partir de $pV^\gamma = \text{cst}$ si besoin), soit $T_A^\gamma p_A^{1-\gamma} = T_B^\gamma p_B^{1-\gamma}$. On a également $p_B = p_C$ car $B \to C$ est isobare, d'où

$$\boxed{T_B = T_A \left(\frac{p_A}{p_C}\right)^{\dfrac{1-\gamma}{\gamma}} = 152\,\mathrm{K}.}$$

On a de même :

$$\boxed{T_D = T_C \left(\frac{p_C}{p_A}\right)^{\dfrac{1-\gamma}{\gamma}} = 527\,\mathrm{K}.}$$

c - L'échange de chaleur avec la source chaude a lieu lors de l'étape $D \to A$. Le fluide est alors plus chaud que la maison ($527\,\mathrm{K} = 254°\mathrm{C}$ au point D), et cède de l'énergie thermique à l'intérieur de la maison.

L'échange de chaleur avec la source froide a lieu lors de l'étape $B \to C$. Le fluide est alors plus froid que le milieu extérieur ($152\,\mathrm{K} = -121°\mathrm{C}$ au point B), et il se réchauffe donc au contact du milieu extérieur, gagnant ainsi de l'énergie thermique.

d - Système (ouvert) : échangeur thermique (étape DA).
Transformation isobare :

$$\text{entrée} \left| \begin{array}{l} T_D = 527\,\mathrm{K} \\ p_D \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \text{sortie} \left| \begin{array}{l} T_A = 293\,\mathrm{K} \\ p_A = p_D \end{array} \right.$$

Aucune partie mobile (donc pas de travail indiqué) et on néglige toute énergie cinétique ou potentielle de pesanteur. Le premier principe pour un système ouvert s'écrit donc

$$\Delta h = q_{DA} = q_C, \quad \text{soit, car on a un gaz parfait : } \boxed{q_C = c_p(T_A - T_D).}$$

En procédant de même pour l'étape BC (mêmes hypothèses), on obtient :

$$\boxed{q_F = c_p(T_C - T_B).}$$

e - L'efficacité est $e_2 = \dfrac{-q_c}{w} = \dfrac{-q_c}{-q_c - q_f} = \dfrac{1}{1 + q_f/q_c}$.
On remarque qu'on a utilisé le premier principe appliqué à l'ensemble du fluide sur un cycle pour avoir $w + q_c + q_f = 0$ et ainsi remplacer w.
On a finalement :

$$\boxed{e_2 = \frac{1}{1 + \dfrac{T_C - T_B}{T_A - T_D}} = 2.07.}$$

Cette valeur est bien inférieure à la valeur $e_1 = 15$ calculée précédemment pour la PAC suivant le cycle de Carnot réversible fonctionnant entre 0°C et 20°C. La raison est que le cycle ABCD effectué par le fluide n'est justement pas le cycle de Carnot.

III Étude d'un congélateur

9 - a - L'unité de a est : $\mathrm{W}/(\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{K}) = \mathrm{W}/\mathrm{J} = \mathrm{s}^{-1}$, donc l'inverse d'un temps.
Pour déterminer son signe, supposons par exemple que $T(t) < T_c$.
On a alors $-aC[T(t) - T_c]$ qui est du signe de a.
Or dans cette situation on doit avoir $\Phi > 0$ (le congélateur reçoit de l'énergie), car on a choisi le cas où la température extérieure est supérieure à la température intérieure.
Il faut donc $\boxed{a > 0}$.

b - Question similaire à l'exercice de TD où on étudie le refroidissement d'une salle de classe, ou à plusieurs questions de colle.

On va appliquer le premier principe de la thermodynamique au système {congélateur et son contenu} pour une évolution entre t et $t+\mathrm{d}t$. Il s'agit d'un système fermé.

On a donc $\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$, avec

- $\delta W = 0$ car phase condensée incompressible indilatable, donc $\delta W = -p_{\text{ext}}\mathrm{d}V = 0$.
- $\mathrm{d}U = C\mathrm{d}T = C[T(t+\mathrm{d}t) - T(t)]$ car phase condensée incompressible indilatable.
- $\delta Q = \Phi \times \mathrm{d}t$.

On a donc

$$\mathrm{d}T = -aC[T(t) - T_c]\,\mathrm{d}t, \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + aT(t) = aT_c.}$$

c - La solution est du type $T(t) = T_{\text{homogène}} + T_{\text{particulier}}$, avec $T_{\text{particulier}} = T_c$ une solution particulière, et $T_{\text{homogène}} = A\exp\{-at\}$ la solution de l'équation homogène.

On a donc $T(t) = A\exp\{-at\} + T_c$.

On détermine la constante A à l'aide de la condition initiale : on a $T(t=0) = T_f$, c'est-à-dire $A + T_c = T_f$, donc $A = T_f - T_c$.

Finalement, on a

$$\boxed{T(t) = (T_f - T_c)\,\exp\{-at\} + T_c.}$$

d - L'expérience décrite indique que $T(\Delta t = 6\mathrm{h}) = T_f'$.

On a donc $(T_f - T_c)\,\exp\{-a\Delta t\} + T_c = T_f'$.

On isole a : $\boxed{a = \dfrac{1}{\Delta t}\,\ln\left(\dfrac{T_f - T_c}{T_f' - T_c}\right).}$

On trouve $a = 0.0304\,\mathrm{h}^{-1}$, soit $\boxed{a = 0.030\,\mathrm{h}^{-1}}$.

e - On doit fournir au congélateur une puissance $\Phi = -aC(T_f - T_c)$.

Or l'efficacité est définie comme $e = \dfrac{Q_f}{W} = \dfrac{\Phi}{P}$.

Donc ceci correspond à une puissance fournie par le moteur qui est $\boxed{P = \dfrac{\Phi}{e} = -\dfrac{aC}{e}(T_f - T_c)}$.

On obtient $\boxed{P = 42\,\mathrm{W}}$.

10 - a - On étudie la transformation 1 vers 2 :

$$\text{entrée}\ \left|\begin{array}{l} T_1 = 265\,\mathrm{K} \\ p_1 = 3.0\,\text{bars} \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \text{sortie}\ \left|\begin{array}{l} T_2 = ? \\ p_2 = 10\,\text{bar} \end{array}\right.$$

On voit sur le diagramme Ts qu'elle est isentropique (s reste constant car trait vertical).

Elle a lieu dans la zone vapeur, et on utilise le modèle du gaz parfait pour la vapeur.

On peut donc appliquer la loi de Laplace : $p_1^{1-\gamma}T_1^{\gamma} = p_2^{1-\gamma}T_2^{\gamma}$.

$$\text{On a donc} \quad \boxed{T_2 = T_1\,\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} = 350\,\mathrm{K}.}$$

b - On décompose l'évolution 3 vers 4 en passant par 3'. Écrivons ce que l'on connaît :

$$3\ \left|\begin{array}{l} T_3 = 300\,\mathrm{K} \\ p_3 = p_2 = 10\,\text{bars} \\ \text{tout liquide} \end{array}\right. \rightarrow \ 3'\ \left|\begin{array}{l} T_3' = T_1 = 265\,\mathrm{K} \\ p_3' = p_4 = p_1 = 3.0\,\text{bar} \\ \text{tout liquide} \end{array}\right. \rightarrow \ 4\ \left|\begin{array}{l} T_4 = T_1 = 265\,\mathrm{K} \\ p_4 = p_1 = 3.0\,\text{bar} \\ \text{fraction vapeur } x \\ \text{et fraction liquide } (1-x) \end{array}\right.$$

La variation d'enthalpie pour une masse m de fluide est donc :

$$\boxed{\Delta H = mc_L(T_3' - T_3) + xm\,l_v.}$$

Comme H est une fonction d'état, sa variation ne dépend pas du chemin suivi. Cette expression de ΔH est donc également valable pour l'évolution 34 suivie par le fluide dans le détendeur.

On indique que cette évolution est isenthalpique, donc $\Delta H = 0$.

On en déduit l'expression de x : $\boxed{x = \dfrac{c_L(T_3 - T_3')}{l_v}}$.

On trouve $x = 0.148$, soit $\boxed{x = 0.15}$.

c - On étudie la transformation 4 vers 1 (qui a lieu dans l'évaporateur). Le système considéré est ouvert, il s'agit de l'évaporateur.

$$4 \left| \begin{array}{l} T_4 = 265\,\mathrm{K} \\ p_4 = 3.0\,\mathrm{bars} \\ \text{titre vapeur } x \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad 1 \left| \begin{array}{l} T_1 = 265\,\mathrm{K} \\ p_1 = 3.0\,\mathrm{bar} \\ \text{tout vapeur} \end{array} \right.$$

On applique le premier principe pour un système ouvert, en négligeant les différences d'énergie cinétique et d'altitude, et avec $w_i = 0$ car il n'y a pas de parties mobiles :

$$\Delta h = q.$$

D'autre part, $\Delta h = (1 - x)l_v$ car cette étape est une vaporisation. On a donc :

$$\boxed{q = (1 - x)l_v}, \text{ soit } q = 1.108\,\mathrm{MJ/kg} \text{ soit } \boxed{q = 1.1\,\mathrm{MJ/kg}}.$$

d - Système ouvert : compresseur.

Transformation :

$$1 \left| \begin{array}{l} T_1 = 265\,\mathrm{K} \\ p_1 = 3.0\,\mathrm{bars} \\ \text{tout vapeur} \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad 2 \left| \begin{array}{l} T_2 = 350\,\mathrm{K} \\ p_2 = 10\,\mathrm{bar} \\ \text{tout vapeur} \end{array} \right.$$

On applique le premier principe pour un système ouvert, en négligeant les différences d'énergie cinétique et d'altitude, et avec $q = 0$ car l'évolution dans le compresseur est isentropique, donc vraisemblablement adiabatique réversible, et $q = 0$ pour une évolution adiabatique. On a donc

$$\Delta h = w_C.$$

D'autre part, $\Delta h = c_p(T_2 - T_1)$ car le fluide est ici un gaz supposé parfait.

On a donc :

$$\boxed{w_C = c_p(T_2 - T_1)}, \text{ soit } w_C = 180.115\,\mathrm{kJ/kg} \text{ soit } \boxed{w_C = 0.18\,\mathrm{MJ/kg}}.$$

e - La grandeur coûteuse est le travail fourni au compresseur. La grandeur utile est l'énergie thermique q prélevée à la source froide (dans l'évaporateur). L'efficacité est donc

$$\boxed{e = \frac{q_{41}}{w_C} = \frac{l_v + c_L(T_3 - T_1)}{c_p(T_2 - T_1)}}, \text{ soit } \boxed{e = 6.2}.$$

Remarque : On peut la comparer à l'efficacité d'un réfrigérateur fonctionnant selon un cycle réversible de Carnot entre une source froide à $T_f = 265\,\mathrm{K}$ et une source chaude à $T_c = 300\,\mathrm{K}$: $e_{\text{Carnot rev}} = \dfrac{T_f}{T_c - T_f} = 7.6$. On a une efficacité inférieure pour notre cycle. Ceci s'explique par le fait que les échanges de chaleur ne sont pas isotherme (la partie 2 vers 2' ne l'est pas), et car la détente 3 vers 4 n'est pas réversible (contrairement à ce qu'affirme le sujet).

11 - a - Pour une masse donnée de gaz parfait, l'enthalpie ne dépend que de la température : $H = H(T)$. Les courbes $H = \text{cst}$ sont donc des courbes $T = \text{cst}$.

Dans le diagramme T-s, il s'agit évidemment de droites horizontales.

Dans le diagramme T-s de l'ammoniac, on voit que ceci commence à être le cas lorsque l'on s'éloigne de la courbe de rosée, tout à droite du diagramme.

Ceci montre que le modèle du gaz parfait est valide plutôt loin de la courbe de rosée.

b - Voir plus loin sur le graphique.

c - On lit $\boxed{T_2 = 85°\text{C}}$ (à un degré près).

On avait trouvé $T_2 = 77°\text{C}$ en utilisant le modèle du gaz parfait. Il y a donc un écart de 9%.

d - On note les points L (d'abscisse s_l), M (d'abscisse s_4) et V (d'abscisse s_v) comme sur le diagramme T-s ci-dessous.

L'entropie étant une grandeur extensive et additive, on a pour l'entropie massique :

$$s_4 = x_4 s_v + (1 - x_4) s_l, \quad \text{soit} \quad \boxed{x_4 = \frac{s_4 - s_l}{s_v - s_l}}.$$

On mesure sur le graphique (avec une règle, en centimètres) que $s_4 - s_l = LM = 1.8\,\text{cm}$, et que $s_v - s_l = LV = 12.9\,\text{cm}$. On en déduit $\boxed{x_4 = 1.8/12.9 = 0.14}$.

On avait trouvé, en utilisant le modèle du gaz parfait, que $x_4 = 0.15$. Il y a donc un écart de 6%.

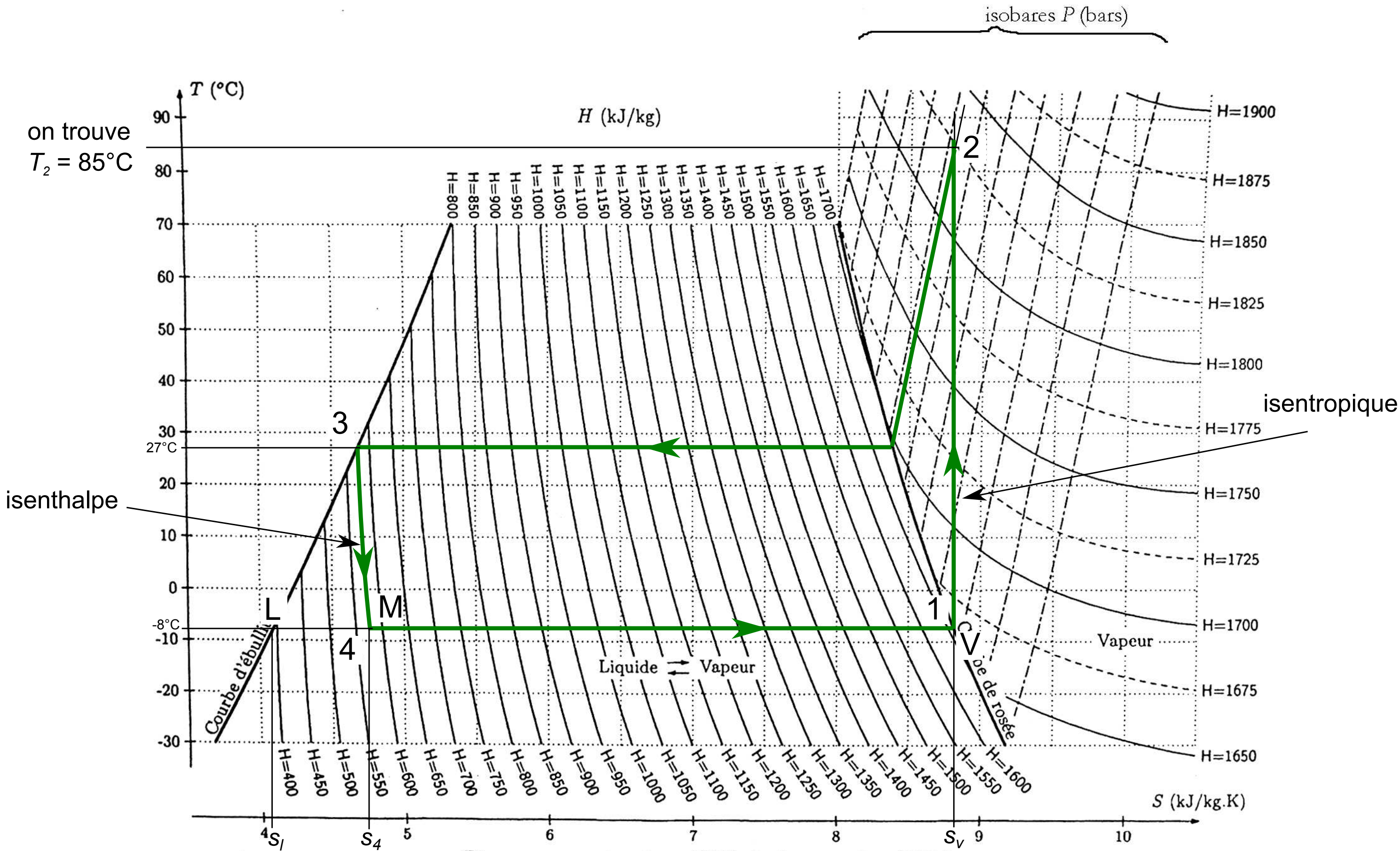


Diagramme entropique $T(S)$ de l'ammoniac (NH_3)

IV Étude d'une éolienne

12 - Le débit volumique se conserve car le fluide est supposé incompressible.

De plus, $D_v = S \times v$ sur toute section droite car on suppose la vitesse constante sur toute section droite.

On en déduit $S_1\, v_1 = S_2\, v_2$.

13 - On peut utiliser la relation de Bernoulli sur une ligne de courant reliant un point de la surface Σ_1 à un point de la surface Σ_2, car l'écoulement est incompressible, stationnaire, et supposé parfait. On néglige également toute différence de hauteur. On a donc

$$\frac{p_2}{\mu} + \frac{1}{2} v_2^2 = \frac{p_1}{\mu} + \frac{1}{2} v_1^2 + w_i.$$

Or $p_1 = p_2$, donc finalement on a

$$\boxed{w_i = \frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right).}$$

14 - La puissance Φ fournie par le fluide à l'hélice est $\Phi = -D_m w_i$.

On a $D_m = \mu D_v = \mu S\, v = \mu S\,\dfrac{v_1+v_2}{2}$.

D'où en utilisant la question précédente pour exprimer w_i :

$$\Phi = -\mu S\,\frac{v_1+v_2}{2}\times\frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right), \quad \text{soit} \quad \boxed{\Phi = \frac{\mu S}{4}\,(v_1+v_2)\left(v_1^2 - v_2^2\right).}$$

15 - En factorisant l'expression précédente, on arrive tout de suite à l'expression $\boxed{\Phi = \dfrac{\mu S}{4}\,v_1^3\,(1+x)(1-x^2)}$.

16 - Il faut trouver le maximum de la fonction $f(x) = (1+x)(1-x^2) = 1 - x^2 + x - x^3$.

On a $f'(x) = -2x + 1 - 3x^2$, qui s'annule pour $x = 1/3$ (seule racine positive).

On a alors, pour cette valeur de x, $\boxed{\Phi_{\max} = \dfrac{8\mu S}{27}\,v_1^3 = 0.30\mu S v_1^3}$.

17 - On a $\Psi_i = D_m\, w_i$. On a donc également $\Phi_{\text{ec}} = D_m\, e_c = \mu D_v\,\dfrac{1}{2} v_1^2$ pour un calcul au point 1.

On utilise ensuite $D_v = Sv = S\dfrac{v_1+v_2}{2} = \dfrac{Sv_1}{2}(1+x)$, pour obtenir $\boxed{\Phi_{\text{ec}} = \dfrac{\mu S}{4}\,v_1^3(1+x)}$.

18 - On obtient

$$\boxed{\eta = \frac{\Phi}{\Phi_{\text{ec}}} = 1 - x^2.}$$

La valeur maximale du rendement est $\eta = 1$ pour $x = 0$. C'est possible car on n'a pas utilisé le formalisme thermodynamique, on a négligé toute perte d'énergie mécanique macroscopique vers de l'énergie microscopique.

Ceci correspond à $v_2 = x\, v_1 = 0$. Toute l'énergie cinétique de vent à donc été “capturée” par l'éolienne. Il ne reste plus rien en sortie.

Enfin, on remarque que la puissance correspondante récupérée par l'hélice est $0.25\,\mu S v_1^3$, ce qui est inférieur à la valeur maximale calculée précédemment. Ceci peut se comprendre car la valeur de cette puissance fait intervenir directement la vitesse $v = (v_1+v_2)/2$ au niveau de l'hélice, et non pas v_1 seulement.

19 - $\Phi_{\max} = 1.4\,\text{kW}$.