Devoir Surveillé

Correction – Physique-chimie – DS 2

I Oscillateur électronique

Extrait du sujet de concours PT 2015.

I.1 Étude du bloc 1 filtre

1 – Deux possibilités pour répondre :

- Soit on raisonne sur le schéma électrique. À basses fréquences la bobine se comporte comme un fil, donc $u_2 = 0$. À hautes fréquences le condensateur se comporte comme un fil, donc $u_2 = 0$.
- Soit on raisonne sur l'expression de $\underline{H}$ donnée dans l'énoncé. Pour $x \to 0$ (basses fréquences) et pour $x \to +\infty$ (hautes fréquences) on a $\underline{H} \to 0$, et donc $u_2 = 0$.

Ces deux possibilités montrent chacune qu'il s'agit d'un filtre passe-bande.

I.2 Étude du bloc ALI

2 –
- L'ALI possède une unique rétroaction sur la patte -, il fonctionne donc en régime linéaire. De plus, il est supposé idéal. On aura donc $\underline{V}_+ = \underline{V}_-$ et $\underline{i}_+ = \underline{i}_- = 0$.
- On a $\underline{V}_+ = \underline{u}_2$.

  D'autre part, un diviseur de tension (possible car $\underline{i}_- = 0$) indique que $\underline{V}_- = \dfrac{R_1}{R_1+R_2}\underline{u}_3$.
- On a donc $\underline{u}_2 = \underline{V}_+ = \underline{V}_- = \dfrac{R_1}{R_1+R_2}\underline{u}_3$, d'où $\boxed{\underline{G} = \dfrac{\underline{u}_3}{\underline{u}_2} = \dfrac{R_1+R_2}{R_1} = 1 + \dfrac{R_2}{R_1}}$.

3 – On a immédiatement $\boxed{K = |\underline{G}| = 1 + \dfrac{R_2}{R_1}}$.

I.3 Système bouclé

On ferme l'interrupteur, réalisant ainsi un système bouclé.

4 – En bouclant le système, on a alors $\underline{u}_1 = \underline{u}_3$. On a donc $\underline{u}_3 = \underline{G}\underline{u}_2 = \underline{GH}\underline{u}_1 = \underline{GH}\underline{u}_3$. On ne simplifie pas par $\underline{u}_3$, puisque l'objectif est de passer dans le domaine temporel. On va donc utiliser la correspondance $\boxed{(\mathrm{j}\omega) \to \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$.

Donc $\underline{u}_3 = \dfrac{KA_0}{1+\mathrm{j}Q\left(x-\frac{1}{x}\right)}\underline{u}_3 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{u}_3\left(1+\mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right) = KA_0\,\underline{u}_3 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{u}_3\left(1+\dfrac{Q\mathrm{j}\omega}{\omega_0}+\dfrac{Q\omega_0}{\mathrm{j}\omega}\right) = KA_0\,\underline{u}_3$. On multiplie tout par $\mathrm{j}\omega$ car on ne veut pas de terme en $1/\mathrm{j}\omega$: $\underline{u}_3\left(\mathrm{j}\omega+\dfrac{Q(\mathrm{j}\omega)^2}{\omega_0}+Q\omega_0\right) = KA_0\,(\mathrm{j}\omega)\underline{u}_3$.

Ceci donne donc dans le domaine temporel, après réarrangement : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u_3}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}(1-KA_0)\dfrac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2u_3 = 0}$.

Remarque : On est tenté de simplifier par $\underline{u}_3$ dans la relation $\underline{u}_3 = \underline{GH}\underline{u}_3$. On obtient alors $\underline{GH} = 1$, ce qui est la condition de Barkhausen, qui indique quand il y a oscillations strictement sinusoïdales. Mais ce n'est pas l'objet de la question.

5.a – On a des oscillations (quasi sinusoïdales ou non) dès que le coefficient en facteur de $\dfrac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t}$ est de signe différent des autres termes, donc dès qu'il est négatif, donc dès que $KA_0 > 1$.

Pour que les oscillations soient quasi sinusoïdales, il faut que ce terme en facteur de $\dfrac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t}$ soit négatif mais très petit en valeur absolue. Il faut donc $\boxed{KA_0 > 1}$ tout en ayant $\boxed{\dfrac{|1-KA_0|}{Q} \ll 1}$.

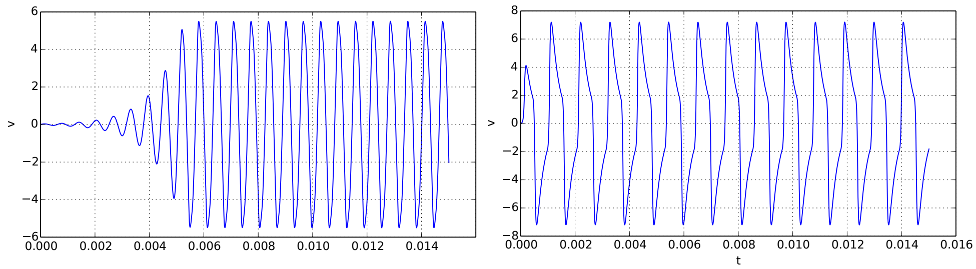
5.b – Lorsque c'est le cas, on peut négliger le terme en $\dfrac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t}$ dans l'équation différentielle, qui devient alors $\dfrac{\mathrm{d}^2u_3}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u_3 = 0$, dont on sait que les solutions sont sinusoïdales de pulsation ω_0 et donc de fréquence $\boxed{f_0 = \omega_0/(2\pi)}$.

6.a – On a déjà dit que pour que les oscillations démarrent, il faut $\boxed{A_0 K > 1}$.

6.b – La solution de l'équation différentielle est alors une fonction sinusoïdale dont l'amplitude croît de façon exponentielle.

7.a – Mais en pratique cette amplitude ne peut pas tendre vers l'infini. Elle se stabilise rapidement à une valeur finie. Ceci est expliqué par le fait que lorsque u_3 dépasse la tension de saturation de l'ALI, celui-ci sature. Les hypothèses qui mènent à l'équation différentielle de la question 4 ne sont alors plus valides. C'est donc la saturation de l'ALI qui explique la stabilisation de l'amplitude des oscillations.

7.b – On a l'allure suivante (soit à gauche si on n'est pas trop loin du seuil, soit à droite si on est loin du seuil) :



I.4 Utilisation du dispositif

8.a – On a $f_{\text{osc}} = \dfrac{D}{\sqrt{C_0(1-\frac{x}{l})}} = \dfrac{D}{\sqrt{C_0}}\left(1-\dfrac{x}{l}\right)^{-1/2}$. On utilise ensuite un développement limité du type $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u$, avec ici $u = -x/l$ et $\alpha = -1/2$.

Ici on a donc $f_{\text{osc}} = \dfrac{D}{\sqrt{C_0}}\left(1+\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{l}\right) = ax + b$ avec $\boxed{a = \dfrac{D}{2l\sqrt{C_0}}}$ et $\boxed{b = \dfrac{D}{\sqrt{C_0}}}$.

8.b – On a $\Delta f = f_{\text{osc}} - f_{\text{or}} = ax + b - f_{\text{or}}$. Or f_{or} est la fréquence pour $x = 0$, donc on a $f_{\text{or}} = f_{\text{osc}}(0) = b$. On a donc $\Delta f = ax$. Ainsi $\boxed{x_{\text{min}} = \Delta f_{\text{min}}/a = 0.19\,\text{mm}}$.

II Sous-marins

Extrait du sujet de concours CCP 2012.

Première partie : immersion du sous-marin

1.1 - Les forces s'exerçant sur ce volume mésoscopique sont le poids et les forces de pression. On rappelle que le poids est donné par $\vec{P} = m\vec{g}$, et que la résultante des forces de pression est égale à $\overrightarrow{\mathrm{d}F} = \mathrm{d}S \times p \times \vec{n}$. Donc ici on a :

- Le poids, $\overrightarrow{\mathrm{d}P} = \mathrm{d}m\,\vec{g} = (\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z) \times (-g\vec{e}_z)$.
- Les forces de pression selon z sont : $\overrightarrow{\mathrm{d}F}_z = (\mathrm{d}x\mathrm{d}y)p(x,y,z)\vec{e}_z + (\mathrm{d}x\mathrm{d}y)p(x,y,z+\mathrm{d}z)(-\vec{e}_z)$.
- Les forces de pression selon y sont : $\overrightarrow{\mathrm{d}F}_y = (\mathrm{d}x\mathrm{d}z)p(x,y,z)\vec{e}_y + (\mathrm{d}x\mathrm{d}z)p(x,y+\mathrm{d}y,z)(-\vec{e}_y)$.
- Les forces de pression selon x sont : $\overrightarrow{\mathrm{d}F}_x = (\mathrm{d}z\mathrm{d}y)p(x,y,z)\vec{e}_x + (\mathrm{d}z\mathrm{d}y)p(x+\mathrm{d}x,y,z)(-\vec{e}_x)$.

Le volume $\mathrm{d}\tau$ est à l'équilibre, donc d'après la relation fondamentale de la statique on a $\overrightarrow{\mathrm{d}P} + \overrightarrow{\mathrm{d}F}_z + \overrightarrow{\mathrm{d}F}_y + \overrightarrow{\mathrm{d}F}_x = \vec{0}$.

- Projeté selon y, ceci donne : $\mathrm{d}F_y = 0$, donc $p(x,y,z) - p(x,y+\mathrm{d}y,z) = 0$, donc $\dfrac{p(x,y,z) - p(x,y+\mathrm{d}y,z)}{\mathrm{d}y} = 0$, et donc $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = 0$. Ceci implique que la pression p ne dépend pas de y.

- De même, projeté selon x on obtient que $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$, et donc p ne dépend pas non plus de x. On écrira donc $p(z)$.

  Remarque : l'énoncé demande cette démonstration. En fait, on peut beaucoup plus simplement dire qu'étant donné l'invariance du problème selon x et y, p ne dépend pas de ces deux variables. ρ non plus d'ailleurs, et on notera également $\rho(z)$.

Projetons enfin l'équation selon z : $-\rho(z)\,(\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z)g + (\mathrm{d}x\mathrm{d}y)p(x,y,z) - (\mathrm{d}x\mathrm{d}y)p(x,y,z+\mathrm{d}z) = 0$. Une fois réarrangé, ceci mène à $\dfrac{p(z+\mathrm{d}z)-p(z)}{\mathrm{d}z} = -\rho(z)\,g$, soit encore : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}(z) = -\rho(z)\,g}$.

1.2 - $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}(z) = -\rho\,g \quad\Leftrightarrow\quad p(z) = C - \rho g z$ avec C une constante. En $z=0$ on a $p_0 = p(z=0) = C$. Donc finalement : $\boxed{p(z) = p_0 - \rho g z}$.

Pour $z = 300\,\mathrm{m}$ on trouve $p_{300} = 31.313\times10^5\,\mathrm{Pa}$, soit $\boxed{p_{300} = 31\times10^5\,\mathrm{Pa}}$ (la donnée ayant le moins de chiffres significatifs est $p_0 = 1.0\times10^5\,\mathrm{Pa}$, qui en a deux, donc on en garde deux.

2.1 - Le sous-marin est immobile, donc la relation fondamentale de la statique implique que la somme des forces qui s'exercent sur lui est nulle. Ici ces forces sont :

- Le poids $\vec{P} = M\vec{g}$.
- La poussée d'Archimède (qui est l'expression de la résultante des forces de pression) : $\vec{\Pi} = -\rho_0 V_{\mathrm{imm}}\vec{g}$, avec ρ_0 la masse volumique du fluide et V_{imm} le volume du fluide déplacé. Comme l'indique l'énoncé, on a négligé la poussée d'Archimède due à l'air et au volume émergé.

On a donc $M\vec{g} - \rho_0 V_{\mathrm{imm}}\vec{g} = \vec{0}$, donc $\boxed{V_{\mathrm{imm}} = \dfrac{M}{\rho_0}}$.

2.2 - On a déjà l'expression pour V_{imm}. Il reste à écrire que $V = \pi R^2 L$. D'où $\boxed{\dfrac{V_{\mathrm{imm}}}{V} = \dfrac{M}{\rho_0 \pi R^2 L}}$.

Application numérique : $\boxed{\dfrac{V_{\mathrm{imm}}}{V} = 0.87}$. (La donnée qui a le moins de chiffres significatifs est $R = 6.0\,\mathrm{m}$, avec deux chiffres.)
Commentaire : même avec les ballasts vides, le sous-marin est presque totalement immergé.

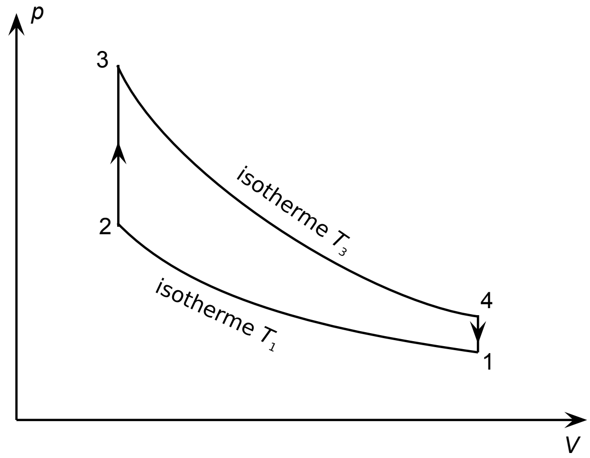
2.3 - Lorsque l'on remplit les ballasts par de l'eau de mer le volume du sous-marin ne change pas, donc la poussée d'Archimède non plus. En revanche la masse du sous-marin est augmentée (de la masse d'eau ajoutée), donc son poids augmente. Il en résulte que le sous-marin s'enfonce dans l'eau.

2.4 - L'énoncé entend par "le sous-marin est en immersion" le fait que le sous-marin soit entièrement dans l'eau ($V_{\mathrm{imm}} = V$) tout en restant immobile.
La poussée d'Archimède est alors $\vec{\Pi} = -\rho_0 V_{\mathrm{imm}}\vec{g} = -\rho_0 V\vec{g}$. Le poids est alors $\vec{P} = (M + \rho_0 V_b)\vec{g}$.
À l'équilibre on a donc $\rho_0 V = M + \rho_0 V_b$, d'où $\boxed{V_b = V - \dfrac{M}{\rho_0} = 2.0\times10^3\,\mathrm{m}^3}$.

2.5 - Lorsque le sous-marin est totalement immergé, la coque extérieure correspond à une frontière entre l'eau de mer et l'eau des ballasts, qui sont à la même pression. Il n'y a donc pas de contrainte sur cette coque.
En revanche, la coque interne correspond à une frontière entre l'eau des ballasts (qui est à la pression $p(z)$ et l'air du sous-marin (qui est à p_0). Ceci correspond à des contraintes très fortes.

Deuxième partie : propulsion du sous-marin

4.1 - On a le cycle schématisé ci-contre.
Il est parcouru dans le sens horaire, s'agit donc d'un cycle moteur ($\int p\mathrm{d}V$ sur un cycle est positive, donc le travail reçu $= -\int p\mathrm{d}V$ est négatif, c'est donc que pendant un cycle le fluide fournit du travail au milieu extérieur).



4.2 - Posons le problème :

- Système : {gaz contenu dans le cylindre}, c'est un système fermé (donc $n = \text{cst}$).
- Transformation : compression isotherme réversible d'un gaz supposé parfait, entre les états :

$$\text{État initial} \left| \begin{array}{l} T_1 = 300\,\text{K} \\ p_1 \\ V_1 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \text{État final} \left| \begin{array}{l} T_2 \\ p_2 \\ V_2 = V_1/\rho \end{array} \right.$$

Pour calculer le travail, on effectue :

$$W_{12} = -\int_1^2 p_{\text{ext}}\mathrm{d}V = -\int_1^2 p\mathrm{d}V = -\int_1^2 nRT_1\mathrm{d}V = -nRT_1\int_1^2 \mathrm{d}V = -nRT_1\ln(V_2/V_1).$$

On a utilisé pour la 2$^{\text{e}}$ égalité le fait que $p = p_{\text{ext}}$ à tout instant car la transformation est réversible, pour la 3$^{\text{e}}$ égalité la loi des gaz parfait, et pour la 4$^{\text{e}}$ le fait que n et T sont constants (système fermé, et évolution isotherme). Le calcul donne donc : $\boxed{W_{12} = nRT_1\ln\rho}$.

Ensuite, pour un gaz parfait la variation d'énergie interne est $\Delta U = C_v\Delta T = 0$ ici car l'évolution est isotherme. On applique donc le premier principe au système {gaz} pour avoir : $0 = \Delta U = W_{12} + Q_{12}$. On en déduit $\boxed{Q_{12} = -nRT_1\ln\rho}$.

Comme $\rho > 1$, on a $W_{12} > 0$ et $Q_{12} < 0$.
On s'y attendait puisqu'il s'agit d'une compression du gaz, pour laquelle il faut effectivement fournir du travail (pour comprimer) (d'où $W > 0$), et qui a pour effet d'échauffer le gaz et donc de produire un transfert thermique du gaz vers l'extérieur (d'où $Q < 0$).

4.3 - Posons le problème :

- Système : {gaz contenu dans le cylindre}, c'est un système fermé (donc $n = \text{cst}$).
- Transformation : échauffement isochore réversible d'un gaz supposé parfait, entre les états :

$$\text{État initial} \left| \begin{array}{l} T_2 = T_1 = 300\,\text{K} \\ p_2 \\ V_2 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \text{État final} \left| \begin{array}{l} T_3 = 600\,\text{K} \\ p_3 \\ V_3 = V_2 \end{array} \right.$$

La transformation est isochore donc le travail des forces de pression est $W_{23} = -\int p_{\text{ext}}\mathrm{d}V = 0$.
On peut donc applique le premier principe pour trouver le transfert thermique Q_{23} : on a $\Delta U = W_{23} + Q_{23} = Q_{23}$, et comme il s'agit d'un gaz parfait on a $\Delta U = \dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_3 - T_1)$.

D'où finalement : $\boxed{Q_{23} = \dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_3 - T_1)}$ (on a utilisé $T_2 = T_1$). Comme $T_3 > T_1$, on a $Q_{23} > 0$. C'est normal puisqu'il s'agit d'un échauffement, donc le gaz reçoit effectivement de la chaleur.

4.4 - Il s'agit, tout comme à la question 4.2, d'une transformation isotherme réversible. Cette fois la température est T_3, et il faut inverser le rapport des volumes car on passe de $V_3 = V_2$ à $V_4 = V_1$ (alors qu'en 4.2 on passait de V_1 à V_2). On trouve donc cette fois $\boxed{W_{34} = -nRT_3\ln\rho}$ et $\boxed{Q_{34} = nRT_3\ln\rho}$.

On a $W_{34} < 0$ et $Q_{34} > 0$. Il s'agit d'une détente, donc le gaz fournit du travail au milieu extérieur ($W_{34} < 0$) et se refroidit donc reçoit un transfert thermique venant de l'extérieur ($Q_{34} > 0$).

4.5 - Tout comme à la question 4.3, il s'agit d'un refroidissement isochore, cette fois de la température T_1 à la température $T_4 = T_3$. On trouve donc cette fois $\boxed{Q_{41} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_3)}$. Comme $T_3 > T_1$, on a $Q_{41} < 0$. C'est normal puisqu'il s'agit d'un refroidissement, donc le gaz fournit effectivement de la chaleur au milieu extérieur

4.6 - La grandeur coûteuse est à rechercher dans les transferts thermiques Q, puisque ce sont eux que l'on doit produire pour faire tourner le moteur.
Ici on indique que le régénérateur assure un transfert parfait entre l'énergie Q_{41} perdue par le système lors de l'étape 4-1 et l'énergie Q_{23} reçue par le système lors de l'étape 2-3. Cette énergie thermique reçue Q_{23} ne coûte donc rien.
De plus, $Q_{12} < 0$ est de la chaleur perdue par le système. Le seul transfert thermique qui coûte est donc Q_{34}, qui est positif donc bien reçu par le système.
La grandeur d'intérêt est ici le travail récupéré au cours d'un cycle, c'est-à-dire $W_{\text{récup}} = -W$. On peut calculer W à l'aide du premier principe appliqué lors d'un cycle : $0 = \Delta U = W + Q = W + Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41} = W + Q_{12} + Q_{34}$. On a donc $W_{\text{récup}} = -W = Q_{12} + Q_{34}$.
Le rendement est donc $\eta' = \frac{\text{utile}}{\text{coût}} = \frac{Q_{12} + Q_{34}}{Q_{34}} = \frac{-T_1 + T_3}{T_3}$ car les facteurs $nR\ln\rho$ se simplifient. On a donc $\boxed{\eta' = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 0.500}$.
Le commentaire attendu est que l'expression obtenue pour η' est la même que pour le cycle de Carnot réversible.

III Bilan des forces sur un barrage poids

1. $\vec{P} = \left(\frac{1}{2}Lhe\right) \times \rho_0 d \times \vec{g}$, soit $\boxed{\vec{P} = \frac{1}{2}Lhe\rho_0 dg\vec{e}_z}$. On trouve $\boxed{||\vec{P}|| = 4.5 \times 10^{11}\,\text{N}}$.

2. La pression est uniforme égale à p_0, donc on a $\vec{F}_1 = p_0 S\,\vec{n}$ avec ici $S = h\,L$ et $\vec{n} = \vec{e}_x$. Donc $\boxed{\vec{F}_1 = p_0 h\,L\,\vec{e}_x}$.

3. **a -** On a $\boxed{\vec{n} = -\sin\alpha\,\vec{e}_x + \cos\alpha\,\vec{e}_z}$.

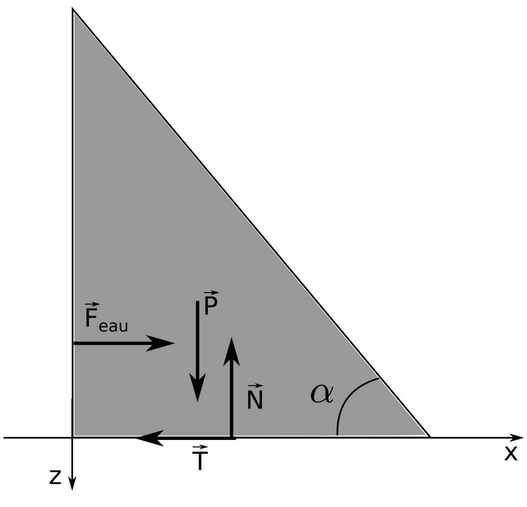
b - La pression est uniforme égale à p_0. On a donc $\vec{F}_2 = p_0 S\,\vec{n}$. Ici la surface est $S = L \times \frac{h}{\sin\alpha}$. Donc $\vec{F}_2 = p_0\,L\,\frac{h}{\sin\alpha}\,(-\sin\alpha\,\vec{e}_x + \cos\alpha\,\vec{e}_z) = p_0 Lh\left(-\vec{e}_x + \frac{1}{\tan\alpha}\vec{e}_z\right)$. On remplace $\tan\alpha$ par h/e, et on obtient : $\boxed{\vec{F}_2 = -p_0 Lh\vec{e}_x + p_0 L\,e\,\vec{e}_z}$.

4. On a donc $\boxed{\vec{F}_{\text{air}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = p_0 L\,e\,\vec{e}_z}$.

On trouve $\boxed{||\vec{F}_{\text{air}}|| = 1.4 \times 10^{10}\,\text{N}}$. Ceci est négligeable devant le poids du barrage (facteur 30). On note qu'on peut bien comparer ces deux forces car elles ont même direction.

5. Il s'agit de ce que l'on a traité en cours. Très brièvement, on trouve $\vec{F}_{\text{eau}} = \int_{z=0}^{h}(\rho_0 g z)(L\text{d}z)\vec{e}_x = \frac{1}{2}\rho_0 g L h^2 \vec{e}_x$.

6. Voir à droite.



7. **a -** Selon l'axe z, on a $\vec{N} + \vec{P} = \vec{0}$, d'où $\boxed{\vec{N} = -\frac{1}{2}Lhe\rho_0 dg\vec{e}_z}$.

Selon l'axe x on a $\vec{T} + \vec{F}_{\text{eau}} = \vec{0}$, d'où $\boxed{\vec{T} = -\frac{1}{2}\rho_0 g L h^2 \vec{e}_x}$.

b - Le barrage ne glisse pas tant que $||\vec{T}|| \leq \mu_s ||\vec{N}||$, ce qui est équivalent à $\rho_0 g L h^2 \leq \mu\,Lhe\rho_0 dg$, soit tant que $\boxed{h \leq \mu_s e d}$.
Cette condition est bien vérifiée pour le barrage de la Grande-Dixence avec une certaine marge.