

## Correction – TD – Utilisation des transformations infinitésimales en thermodynamique

### II Évolution de la température dans une salle de classe

- 1 -  $a > 0$
- 2 - On arrive à  $T(t) = (T_0 - T_{\text{ext}})e^{-at} + T_{\text{ext}}$ , et au bout de 2h on a  $T = 16^\circ\text{C}$ .
- 3 - La puissance fournie doit être de 8.0 kW.

### III Étude d'une pompe à chaleur

#### Modèle avec des thermostats

1. a - La pompe à chaleur permet de chauffer la source chaude, donc il y a un transfert thermique qui va du fluide caloporteur vers la source chaude. On a donc  $Q_c < 0$  (car  $Q_c$  est la chaleur algébriquement reçue par le fluide).  
La pompe à chaleur prélève de la chaleur à la source froide, donc elle reçoit bien un transfert thermique de la part de la source froide :  $Q_f > 0$ .  
Enfin, la pompe à chaleur a besoin de recevoir du travail pour fonctionner, donc  $W > 0$ .
- b - La grandeur utile est  $-Q_c$ , c'est-à-dire la chaleur reçue par la source chaude.  
La grandeur coûteuse est le travail  $W$  à fournir au fluide caloporteur.

On a donc  $\epsilon = \frac{-Q_c}{W}$ .

2. a - Par définition, la température d'un thermostat reste constante. On a donc  $T_c$  et  $T_f$  constantes tout au long de l'évolution.

- b - L'entropie échangée lors d'un transfert thermique avec un thermostat à la température  $T_0$  est  $S_e = \frac{Q_{\text{reçue}}}{T_0}$ .

- c - Le système considéré est le fluide caloporteur. C'est un système fermé. La transformation considérée consiste en un cycle effectué par ce fluide, au cours duquel il reçoit de la part de la source chaude un transfert thermique  $Q_c$ , de la source froide un transfert thermique  $Q_f$ , ainsi qu'un travail  $W$  (qui lui est fourni par un compresseur par exemple).

- L'application du premier principe lors d'un cycle donne  $\Delta U = W + Q_c + Q_f$ . Or  $\Delta U = 0$  car  $U$  est une fonction d'état, donc sa variation est nulle au cours d'un cycle (au début et à la fin du cycle le fluide est dans le même état). On a donc  $W + Q_c + Q_f = 0$ .

- L'application du second principe donne  $\Delta S = S_e + S_c = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + S_c$ . On a utilisé le fait que  $T_c$  et  $T_f$  sont constants pour exprimer les entropies échangées.

Or  $\Delta S = 0$  car  $S$  est une fonction d'état, donc sa variation est nulle au cours d'un cycle, et  $S_c = 0$  car on indique que le cycle est réversible.

On a donc  $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0$ .

- Enfin, il faut exprimer  $\epsilon = \frac{-Q_c}{W} = \frac{-Q_c}{-Q_c - Q_f} = \frac{1}{1 + Q_c/Q_f}$ . Or  $Q_c/Q_f = -T_c/T_f$

d'après le second principe. Donc on obtient :  $\epsilon = \frac{1}{1 - T_f/T_c}$ .

L'application numérique donne  $\epsilon = 29.3$ . (Contrairement à un rendement, une efficacité peut bien être supérieure à 1.)

## Modèle avec des pseudo-sources

3. Système : fluide caloporteur. Transformation : cycle infinitésimal. Lors d'un cycle, même infinitésimal, les fonctions d'état ont une variation nulle. On a donc entre le début et la fin du cycle :  $dU = 0$  et  $dS = 0$ .

D'après le premier principe :  $dU = \delta W + \delta Q_f + \delta Q_c$ , donc ici  $\delta W + \delta Q_f + \delta Q_c = 0$ .

Concernant le second principe, le cycle est réversible donc  $\delta S_c = 0$ . De plus pendant le cycle infinitésimal les températures des sources sont constantes, donc  $\delta S_e = \frac{\delta Q_c}{T_c(t)} + \frac{\delta Q_f}{T_f(t)}$ . On a donc

$$0 = dS = \delta S_e, \text{ donc : } \frac{\delta Q_c}{T_c(t)} + \frac{\delta Q_f}{T_f(t)} = 0.$$

4. a - ★ On applique le premier principe à la source froide. La transformation est encore un cycle infinitésimal.

On a  $dU_{\text{source froide}} = -\delta Q_f + 0$  car le travail est nul (la source froide est de l'eau incompressible indilatable dont le volume ne change pas), et car la chaleur reçue par la source froide est l'opposée de la chaleur reçue par le fluide caloporteur de la part de la source froide, donc  $-Q_f$ .

★ Enfin, on a  $dU_{\text{source froide}} = mcdT_f$  car la source froide est constituée d'une masse  $m$  d'eau de capacité thermique massique  $c$ .

★ Finalement on obtient  $\delta Q_f = -mcdT_f$ .

b - Exactement de la même façon, on montre que  $\delta Q_c = -mcdT_c$ .

5. a - On en déduit immédiatement que  $\frac{dT_f}{T_f} + \frac{dT_c}{T_c} = 0$ .

b - On a  $0 = \frac{dT_f}{T_f} + \frac{dT_c}{T_c} = d(\ln T_f) + d(\ln T_c) = d(\ln T_f + \ln T_c) = d(\ln(T_f T_c))$ . Donc  $\ln(T_f T_c)$  est constant, donc  $T_f T_c$  est également constant tout au long du fonctionnement de la machine.

6. a - La pompe à chaleur transfère de la chaleur depuis la source froide vers la source chaude ( $Q_f > 0$  et  $Q_c < 0$ ). Donc la source froide va se refroidir et la source chaude va se réchauffer :  $T_f(t)$  diminue et  $T_c(t)$  augmente.

b - On peut écrire  $\epsilon(t) = \frac{T_c(t)}{T_c(t) - T_f(t)} = \frac{T_f(t)T_c(t)}{T_f(t)T_c(t) - T_f(t)^2} = \frac{T_{f0}T_{c0}}{T_{f0}T_{c0} - T_f(t)^2}$ . Comme  $T_f(t)^2$  diminue, alors le dénominateur augmente (signe -), et donc  $\epsilon(t)$  diminue.

On s'y attendait, car au cours du temps l'écart de température entre les deux sources augmente, ce qui rend plus difficile le transfert d'énergie de la source froide à la source chaude.

**Remarque :** On peut déterminer l'expression de  $T_f(t)$  et de  $T_c(t)$  à condition de se donner une expression pour la puissance fournie au fluide par la machine : il faut se donner  $P = \frac{\delta W}{dt}$  en watt.

On utilise alors le premier principe et le second principe. Mais les mathématiques sont un peu laborieuses.

## V Démonstration de la loi de Laplace

- 1 - Pour un gaz parfait qui subit une transformation adiabatique réversible ou isentropique, le produit  $pV^\gamma$  reste constant au cours de la transformation.

Remarque :  $\gamma = C_p/C_V$  doit également être constant au cours de la transformation pour que la loi de Laplace soit valable. Ce sera toujours le cas cette année. Il se peut que ce ne soit plus le cas si la température évolue au-dessus de quelques milliers de degrés.

2 - On a  $pV^\gamma = \text{cst}$  au cours de la transformation. On utilise la loi des gaz parfait,  $pV = nRT$ , avec  $n$  constant (système fermé).

On a donc par exemple :  $p = nRT/V$ , et donc  $\text{cst} = pV^\gamma = \frac{nRT}{V}V^\gamma = nRTV^{\gamma-1}$ , d'où  $TV^{\gamma-1} = \text{cst}/nR = \text{cst}'$ .

De façon similaire, on a  $V = nRT/p$ , donc  $\text{cst} = pV^\gamma = p \left( \frac{nRT}{p} \right)^\gamma = (nR)^\gamma T^\gamma p^{1-\gamma}$ , d'où  $T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{cst}/(nR)^\gamma = \text{cst}''$ .

3 - Le premier principe pour une évolution infinitésimale est  $dU = \delta W + \delta Q$ .

Il n'y a que des forces de pression ici, donc  $\delta W = -p_{\text{ext}}dV$ . Comme l'évolution est réversible, on a  $p_{\text{ext}} = p$  à tout moment. Donc  $\delta W = -pdV$ .

De plus, l'évolution étant adiabatique, on a  $\delta Q = 0$ .

On obtient donc :  $\boxed{dU = -pdV}$ .

4 - Le fait d'avoir un gaz parfait permet d'écrire  $dU = C_v dT = \frac{nR}{\gamma-1} dT$ .

5 - On a donc  $\frac{nR}{\gamma-1} dT = -pdV$ . Cette expression fait intervenir  $p$ ,  $V$  et  $T$ . Il faut donc éliminer  $T$ .  
On le fait en utilisant la loi des gaz parfaits :  $T = pV/(nR)$  :

$$\begin{aligned} \frac{nR}{\gamma-1} dT &= -pdV \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma-1} d(pV) &= -pdV \\ \Leftrightarrow d(pV) &= -(\gamma-1)pdV \\ \Leftrightarrow pdV + Vdp &= (1-\gamma)pdV \\ \Leftrightarrow \boxed{Vdp} &= \boxed{-\gamma pdV}. \end{aligned}$$

6 - On sépare les variables : on a  $\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}$ . Ceci est équivalent à :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} &= -\gamma \frac{dV}{V} \\ \Leftrightarrow d \ln p &= -\gamma d \ln V \\ \Leftrightarrow \int_A^B d \ln p &= \int_A^B -\gamma d \ln V \\ \Leftrightarrow \ln \frac{p_B}{p_A} &= -\gamma \ln \frac{V_B}{V_A} \\ \Leftrightarrow \ln \frac{p_B}{p_A} &= \ln \left( \frac{V_A}{V_B} \right)^\gamma \\ \Leftrightarrow \frac{p_B}{p_A} &= \left( \frac{V_A}{V_B} \right)^\gamma \\ \Leftrightarrow \boxed{p_B V_B^\gamma} &= \boxed{p_A V_A^\gamma}. \end{aligned}$$

## VI Démonstration de la relation de Mayer

1 - Par définition on a  $H = U + pV$ . Pour un gaz parfait, ceci donne  $H = U + nRT$ . De plus, pour un gaz parfait on a  $C_p = \frac{dH}{dT}$  et  $C_V = \frac{dU}{dT}$ . Donc en dérivant la relation précédente par rapport à  $T$ , on obtient tout de suite la relation de Mayer  $\boxed{C_p = C_V + nR}$ .

2 - Dans la relation  $C_p - C_V = nR$  on remplace  $C_p$  par  $\gamma C_V$ . On a alors  $\gamma C_V - C_V = nR$ , d'où

$$C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}.$$

On a ensuite  $C_p = \gamma C_V = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}.$

## VII Démonstration pour l'entropie de la phase condensée

1 - La première identité thermodynamique indique que la variation élémentaire de  $U$  suite à un changement élémentaire de  $S$  et de  $V$  est :  $dU = TdS - pdV$ .

On a en plus  $dU = CdT$  pour une phase condensée incompressible indilatable, ainsi que  $dV \simeq 0$  (caractère incompressible et indilatable : le volume ne change pas).

On a donc  $CdT = TdS$ , soit  $dS = C \frac{dT}{T}$ .

2 - On a  $dS = C \frac{dT}{T} = Cd(\ln T)$ . On intègre cette expression entre deux états  $A$  et  $B$  :  $\int_A^B dS = \int_A^B C d(\ln T)$ , ce qui implique bien  $S_B - S_A = C \ln T_B - C \ln T_A = C \ln \frac{T_B}{T_A}$ .