Correction – TD – Statique des fluides

I Vrai-faux/questions courtes ⋆ | [• ∘ ∘]

1 - Si on note h la hauteur entre la surface à l'air libre et le point considéré, et p_0 la pression à l'air libre, on a $p(h) = p_0 + \rho g h$. Qui ne dépend donc que de la profondeur h.

On a donc $p_A = p_B = p_C = p_D$.

2 - (V/F) Vrai.

3 - (V/F) Faux. Contre-exemple : un ballon immergé dans l'eau constitue une surface fermée. Et pourtant la résultante des forces de pression qui s'exerce sur lui n'est pas nulle. Elle est d'ailleurs donnée par la formule d'Archimède $\vec{\Pi} = \oiint_s p(M)\mathrm{d}S\vec{n} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{ballon immergé}}\vec{g}$.

4 - (V/F) Faux, elle est continue.

5 - (V/F) Faux, de 10 bars tous les 10 mètres.

6 - (V/F) Faux. Une particule de fluide est un volume mésoscopique fermé de fluide. Il continent donc un grand nombre de molécules ou atomes du fluide.

7 - ρg est en $\mathrm{kg \cdot m^{-3} \cdot m \cdot s^{-2} = kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-2}}$.

La pression est en pascal, donc en $\mathrm{N \cdot m^{-2}}$. Or on a la formule poids $= mg$, donc $\mathrm{N = kg \cdot m \cdot s^{-2}}$, et donc $\mathrm{Pa = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}}$.

Et finalement, $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z$ est en $\mathrm{kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-2}}$.

8 - $1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa}$, $1\,\mathrm{atm} = 1.013\,\mathrm{bar}$, $1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N/m^2}$.

IV Barrage

1 - Pour aboutir à cette expression il faut supposer le fluide immobile, incompressible (ρ est alors uniforme), la pesanteur uniforme, et il faut que l'axe z soit orienté vers le bas.

2 - Voir la démonstration effectuée en cours (et la méthode sur le poly de début de chapitre). On trouve :

$$\vec{F}_{\text{eau}\to\text{barrage}} = \left(p_0 H L + \rho_0 g L \frac{H^2}{2}\right)\vec{u}_x.$$

3 - La pression dans l'air est supposée uniforme et égale à p_0.

La force exercée par l'air sur la surface du barrage est donc égale à la pression multipliée par la surface, et elle est dirigée depuis l'air vers le barrage :

$$\vec{F}_{\text{air}\to\text{barrage}} = -p_0 H L \vec{u}_x.$$

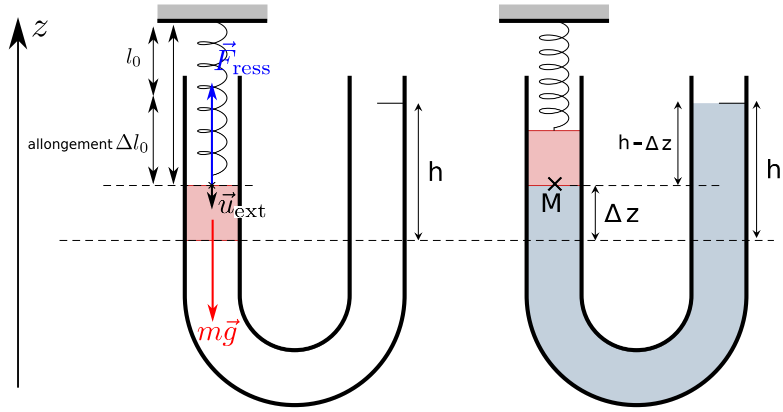
4 - La force totale est la somme des deux précédentes, on trouve donc :

$$\vec{F}_{\text{total}\to\text{barrage}} = \rho_0 g L \frac{H^2}{2}\vec{u}_x.$$

On trouve une intensité de $4.1\times10^{10}\,\mathrm{N}$. (On garde deux chiffres significatifs car on en a seulement deux pour $\rho_0 = 1.0\times10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

Remarque : ceci correspondrait à une masse de $4.1\times10^{10}\,/\,9.81 = 4.2\times10^9\,\mathrm{kg}$.

VI Mesure de densité [• • ◦]



1. On commence par annoter le schéma. On place un axe z, par exemple vers le haut.

   La masse est à l'équilibre. On écrit donc un bilan des forces :

   - poids $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$,
   - force de rappel du ressort $\vec{F}_{\text{ress}} = -k\Delta l_0 \vec{u}_{\text{ext}}$ avec Δl_0 l'allongement du ressort (sa longueur moins sa longueur à vide), et $u_{\text{ext}} = -\vec{e}_z$ le vecteur sortant du ressort,
   - les forces de pression, mais celles-ci se compensent car le bouchon est soumis à la même pression en haut et en bas.

   On a donc, après projection sur l'axe z :

   $$-mg + k\Delta l_0 = 0$$

   D'où $\boxed{\Delta l_0 = \frac{mg}{k}.}$

2. Même chose que précédemment, bilan des forces :

   - poids $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$,
   - force de rappel du ressort $\vec{F}_{\text{ress}} = -k\Delta l \vec{u}_{\text{ext}}$ avec Δl l'allongement du ressort (sa longueur moins sa longueur à vide), et $u_{\text{ext}} = -\vec{e}_z$ le vecteur sortant du ressort,
   - force de pression de l'air sur la face supérieure du bouchon : $p_0 S\vec{e}_z$,
   - force de pression du liquide sur la face inférieure du bouchon : $-pS\vec{e}_z$.

   On a donc, après projection sur l'axe z :

   $$\boxed{-mg + k\Delta l - (p - p_0)S = 0.}$$

3. ⋆ Entre les deux situations, le ressort s'est comprimé. Son allongement a diminué d'une longueur Δz : on a donc $\Delta l = \Delta l_0 - \Delta z$.

   En utilisant la question 1 on a donc $\Delta l = \frac{mg}{k} - \Delta z$.

   ⋆ Il faut ensuite exprimer la pression p au point M.

   On suppose le liquide incompressible. Le point M est à une profondeur $h - \Delta z$ sous la surface libre, la pression en ce point est donc supérieure à la pression atmosphérique d'un terme $\rho g(h - \Delta z)$: on a $p = p_0 + \rho g(h - \Delta z)$.

   ⋆ On remplace dans l'expression de la question précédente :

   $$-mg + k\frac{mg}{k} - k\Delta z - \rho g(h - \Delta z)S = 0.$$

   D'où

   $$\boxed{\rho = \frac{k\Delta z}{g(h - \Delta z)S}.}$$

   ⋆ $\boxed{\rho = 1.0 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}.}$

VII Cube posé au fond d'un récipient [● ○ ○]

1. Il faut que $\rho_c > \rho_e$ (ρ_e masse volumique de l'eau).

2. Hypothèses : fluide immobile, objet non en contact avec les parois. Le théorème indique que la résultante des forces de pression s'exerçant sur un objet immergé est égale à l'opposée du poids du fluide déplacé, donc à $-\rho_{\text{fluide}} V_{\text{objet}} \vec{g}$.

On ne peut pas l'appliquer ici car l'objet touche le fond du récipient.

3. Résultante des forces de pression :

- S'exerçant sur les faces latérales : les forces correspondantes se compensent et la résultante est nulle.
- S'exerçant sur la face supérieure : la résultante est $[p_0 + \rho_e g(H-h)] \times h^2$ dirigée vers le bas.

En notant $\vec{e}_z$ un vecteur unitaire vers le haut, la résultante est donc

$$\vec{R} = -[p_0 + \rho_e g(H-h)] \times h^2\,\vec{e}_z.$$

4. **a.** S'il y a de l'eau sous le cube, alors il y a également une résultante des forces de pression qui s'exercent sous le cube est qui est $+[p_0 + \rho_e g H] \times h^2\,\vec{e}_z$.
La résultante totale est donc $\vec{R} = [p_0 + \rho_e g H] \times h^2\,\vec{e}_z - [p_0 + \rho_e g(H-h)] \times h^2\,\vec{e}_z$, soit $\boxed{\vec{R} = -\rho_e g h^3\,\vec{e}_z.}$

b. En appliquant directement la formule d'Archimède on obtient exactement pareil (h^3 est le volume du cube). Et on peut effectivement l'appliquer dans ce cas là car il y a de l'eau sous le cube, donc il n'est pas en contact avec les parois.

VIII Barrage incliné [● ● ○]

1 - Avec $\vec{e}_z$ vers le bas et $\vec{e}_y$ vers la droite sur le schéma de l'énoncé, le vecteur normal à la face inclinée (et dirigé de l'air vers le barrage) est $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{e}_z - \sin\alpha\,\vec{e}_y$.

Notons $d = \sqrt{e^2 + H^2}$ la longueur de la face inclinée.

On a $\cos\alpha = e/d$ et $\sin\alpha = H/d$.

La résultante des forces de pression exercées par l'air sur le barrage est

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= p_0 L d \vec{n} \\
&= p_0 L d\,(\cos\alpha\,\vec{e}_z - \sin\alpha\,\vec{e}_y) \\
&= p_0 L d \left(\frac{e}{d}\vec{e}_z - \frac{H}{d}\vec{e}_y\right) \\
&= p_0 L e\,\vec{e}_z - p_0 L H \vec{e}_y.
\end{aligned}$$

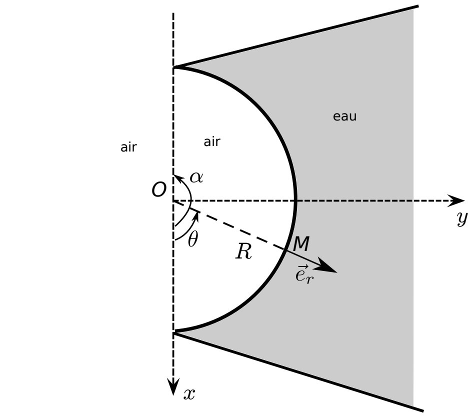
IX Barrage incurvé [● ● ○]

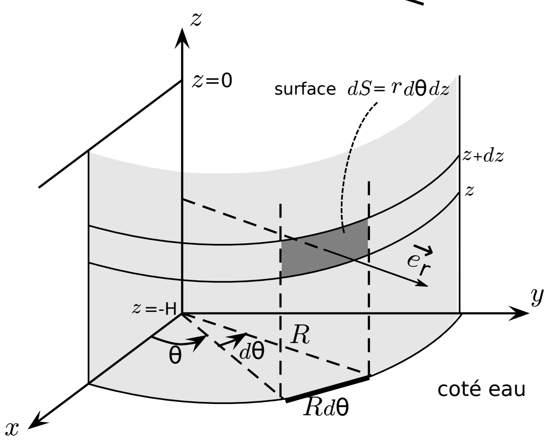
Remarque : l'exercice IV est à savoir faire absolument, alors que celui-ci est moins important.

1 - La longueur d'un arc de cercle de rayon R et d'angle d'ouverture α est : $\boxed{L = \alpha R.}$

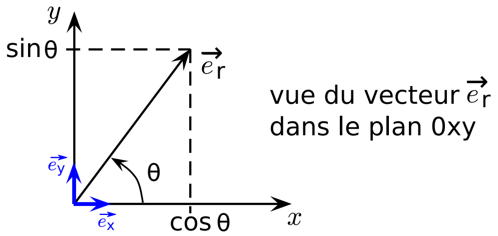
(Un cas particulier bien connu est pour $\alpha = 2\pi$, puisqu'on a alors un cercle complet, dont le périmètre est bien $2\pi R$.)

L'application numérique donne $L = 990\,\text{m}$.





(on a représenté la moitié du barrage seulement)



2 - **a -** On a $\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y$ (voir schéma ci-dessous).

b - Le vecteur normal au point M est donc $\vec{n} = \vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y$.

c - On applique la méthode générale.

- Choix du système de coordonnées : on prend ici des coordonnées cylindriques pour s'adapter à la forme du barrage.
- De quelles variables dépend p : d'aucune, car $p = p_0$ pour l'air. Et pour $\vec{n}$: de θ.
- On construit une petite surface dS où p et $\vec{n}$ sont constants : on considère une surface comme sur le dessin ci-contre.
- L'aire de la surface est

$$\mathrm{d}S = dz \times R\mathrm{d}\theta = R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

La normale à la surface est

$$\vec{n} = \vec{e}_r = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y$$

- La force pressante exercée par l'air sur cette petite surface est donc

$$\mathrm{d}\vec{F} = p_0\,\mathrm{d}S\,\vec{n}.$$

- La force totale exercée par l'air sur le barrage est donc :

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\text{air}\to\text{barrage}} &= \int_{z=-H}^{0}\int_{\theta=0}^{\alpha} p_0\,\mathrm{d}S\,\vec{n} \\
&= \int_{z=-H}^{0}\int_{\theta=0}^{\alpha} p_0\,R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\,(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) \\
&= R\int_{z=-H}^{0}\int_{\theta=0}^{\alpha} p_0\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\,(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) \\
&= R\int_{z=-H}^{0}\left[\int_{\theta=0}^{\alpha}(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y)\mathrm{d}\theta\right] p_0\,\mathrm{d}z \\
&= R\int_{z=-H}^{0}\left[(\sin\alpha - \sin 0)\vec{e}_x + (-\cos\alpha + \cos 0)\vec{e}_y\right] p_0\,\mathrm{d}z \\
&= R\left[\sin\alpha\vec{e}_x + (1-\cos\alpha)\vec{e}_y\right]\int_{z=-H}^{0} p_0\,\mathrm{d}z \\
&= R(\sin\alpha\vec{e}_x + (1-\cos\alpha)\vec{e}_y)\,p_0 H
\end{aligned}$$

Si on prend $\alpha = \pi$, on trouve :

$$\boxed{\vec{F}_{\text{air}\to\text{barrage}} = 2p_0RH\vec{e}_y.}$$

Remarque importante : On voit donc que même si p_0 est uniforme, on ne peut pas dire que la force totale est $p_0 \times$ surface, car le vecteur normal $\vec{n}$ n'est pas constant sur la surface. On n'obtient donc pas $\vec{F}_{\text{air}\to\text{barrage}} = p_0 \times \pi RH\vec{e}_y$, et il faut faire le calcul avec l'intégrale comme ci-dessus.

Remarque : Le résultat s'écrit aussi $2RH\,p_0\,\vec{e}_y$, c'est-à-dire que tout se passe comme si la pression s'exerçait sur une surface de hauteur H et de largeur $2R$. C'est aussi valable pour l'expression de $\vec{F}_{\text{eau}\to\text{barrage}}$.

3 - Même démarche que précédemment, sauf qu'ici $p(z) = p_0 - \rho_0 g z$, et la normale est $\vec{n} = -\vec{e}_r$.

La force totale exercée par l'eau sur le barrage est donc :

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\text{eau}\to\text{barrage}} &= \int_{z=-H}^{0}\int_{\theta=0}^{\alpha} p(z)\,\mathrm{d}S\,\vec{n} \\
&= -\int_{z=-H}^{0}\int_{\theta=0}^{\alpha} (p_0 - \rho_0 g z)\,R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\,(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) \\
&= -R\int_{z=-H}^{0}\int_{\theta=0}^{\alpha} (p_0 - \rho_0 g z)\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\,(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) \\
&= -R\int_{z=-H}^{0}\left[\int_{\theta=0}^{\alpha}(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y)\mathrm{d}\theta\right](p_0 - \rho_0 g z)\,\mathrm{d}z \\
&= -R\int_{z=-H}^{0}\left[(\sin\alpha - \sin 0)\vec{e}_x + (-\cos\alpha + \cos 0)\vec{e}_y)\right](p_0 - \rho_0 g z)\,\mathrm{d}z \\
&= -R\left[\sin\alpha\vec{e}_x + (1-\cos\alpha)\vec{e}_y\right]\int_{z=-H}^{0}(p_0 - \rho_0 g z)\,\mathrm{d}z \\
&= -R(\sin\alpha\vec{e}_x + (1-\cos\alpha)\vec{e}_y)\left(p_0 H + \rho_0 g\frac{H^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

Si on prend $\alpha = \pi$, on trouve :

$$\boxed{\vec{F}_{\text{eau}\to\text{barrage}} = -2R\left(p_0 H + \rho_0 g\frac{H^2}{2}\right)\vec{e}_y.}$$

4 - Finalement, la force totale exercée sur le barrage est la somme des deux forces précédentes :

$$\boxed{\vec{F}_{\text{eau}\to\text{barrage}} = -2R\rho_0 g\frac{H^2}{2}\vec{e}_y.}$$

On trouve $4.1\times10^{10}\,\mathrm{N}$.