Fiche méthode
Mathématiques

Nombres complexes

On note a et b des réels, $\underline{z}$, $\underline{z}_1$ et $\underline{z}_2$ des complexes.

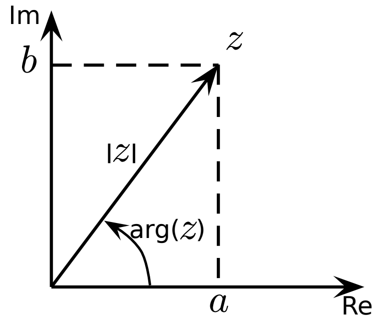
Partie réelle et imaginaire

Soit $\underline{z} = a + \mathrm{j}b$.
On a $\mathrm{Re}(\underline{z}) = a$, et $\mathrm{Im}(\underline{z}) = b$.

Interprétation géométrique

Soit $\underline{z} = a + \mathrm{j}b$.
On se place dans le plan complexe. On peut associer au nombre complexe $\underline{z}$ un vecteur, dont :

- a et b sont les coordonnées cartésiennes,
- $|\underline{z}|$ est la norme,
- $\arg(\underline{z})$ est l'angle entre l'axe des abscisses et le vecteur représentant $\underline{z}$.



On voit sur le dessin qu'on a les valeurs particulières suivantes :

$$\boxed{\arg(1) = 0, \quad \arg(-1) = \pi, \quad \arg(\mathrm{j}) = \pi/2, \quad \arg(-\mathrm{j}) = -\pi/2.}$$

Module

• Propriétés :

$$\boxed{|\underline{z}_1\,\underline{z}_2| = |\underline{z}_1| \times |\underline{z}_2|, \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right| = \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|}.}$$

• Calcul : pour $\underline{z} = a + \mathrm{j}b$ on a

$$\boxed{|a + \mathrm{j}b| = \sqrt{a^2 + b^2}.}$$

Argument

• Propriétés :

$$\boxed{\arg(\underline{z}_1\,\underline{z}_2) = \arg(\underline{z}_1) + \arg(\underline{z}_2), \qquad \text{et} \qquad \arg(\underline{z}_1/\underline{z}_2) = \arg(\underline{z}_1) - \arg(\underline{z}_2).}$$

• Calcul : On a, <u>à condition que $a > 0$</u> :

$$\boxed{\arg(a + \mathrm{j}b) = \arctan\frac{b}{a}.}$$

En physique on a quasiment toujours $a > 0$ et il suffit de retenir la formule ci-dessus. Cela dit, si jamais $a < 0$, on écrit :

$$\begin{aligned}
\arg(a + \mathrm{j}b) &= \arg[(-1)(-a - \mathrm{j}b)] \\
&= \arg(-1) + \arg(-a - \mathrm{j}b) \\
&= \pi + \arctan\frac{-b}{-a} \qquad \text{car } \arg(-1) = \pi \\
&= \pi + \arctan\frac{b}{a}
\end{aligned}$$

• Valeurs particulières : si $a > 0$ est un réel positif, on a

$$\boxed{\begin{aligned} \arg(a) &= 0 \\ \arg(-a) &= \pi \\ \arg(a\mathrm{j}) &= \frac{\pi}{2} \\ \arg(-a\mathrm{j}) &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}}$$

Exponentielle complexe

• Exponentielle d'un imaginaire pur : soit Φ un réel, on a

$$\boxed{e^{\mathrm{j}\Phi} = \cos(\Phi) + \mathrm{j}\sin(\Phi).}$$

D'où :

$$\boxed{\mathrm{Re}\left(e^{\mathrm{j}\Phi}\right) = \cos(\Phi) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left(e^{\mathrm{j}\Phi}\right) = \sin\Phi.}$$

On a aussi

$$\boxed{\left|e^{\mathrm{j}\Phi}\right| = 1.}$$

• Si $\underline{z} = Xe^{\mathrm{j}\Phi}$ avec $X > 0$ réel, alors $\boxed{\left|Xe^{\mathrm{j}\Phi}\right| = X \text{ et } \arg(Xe^{\mathrm{j}\Phi}) = \Phi.}$

• On peut écrire :

$$\underline{z} = |\underline{z}|\, e^{\mathrm{j}\arg(\underline{z})}.$$

• On a : $\cos x = \dfrac{e^{\mathrm{j}x} + e^{-\mathrm{j}x}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{\mathrm{j}x} - e^{-\mathrm{j}x}}{2\mathrm{j}}$, ce qui peut être utile si l'on a oublié ses formules trigonométriques.

Exercices pour s'entraîner

Pour chacune de ces fonctions de transfert, calculer le module et l'argument :

$$1\text{–}\ \ \underline{H} = \frac{-\alpha}{1+\mathrm{j}\tau\omega}\ \ (\alpha > 0\,\text{réel}), \qquad 2\text{–}\ \ \underline{H} = \frac{1}{\mathrm{j}\tau\omega}, \qquad 3\text{–}\ \ \underline{H} = H_0\frac{\mathrm{j}\tau\omega - 1}{\mathrm{j}\tau\omega + 1}\ \ (H_0 > 0\,\text{réel}).$$

Réponses :

$$1\text{–}\ \ |\underline{H}| = \frac{|\alpha|}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}, \qquad \arg(\underline{H}) = \pi - \arctan(\tau\omega).$$

$$2\text{–}\ \ |\underline{H}| = \frac{1}{|\tau\omega|}, \qquad \arg(\underline{H}) = -\frac{\pi}{2}.$$

$$3\text{–}\ \ |\underline{H}| = |H_0|, \qquad \arg(\underline{H}) = \pi - 2\arctan(\tau\omega).$$