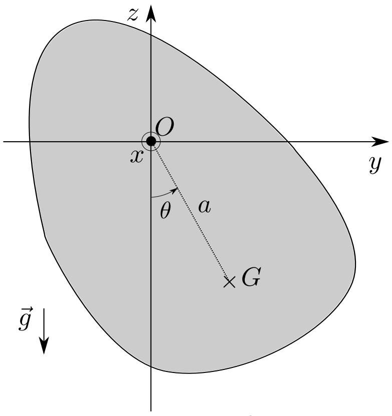
Mécanique du solide en rotation

I Rappels



Expressions des différentes grandeurs

- **Moment d'inertie** d'un solide par rapport un axe Ox :
  - ⋆ Pour une masse ponctuelle m située à une distance r de l'axe Ox : $J_{Ox} = r^2 m$.
  - ⋆ Pour une masse ponctuelle $\mathrm{d}m$ située à une distance r de l'axe Ox : $J_{Ox} = r^2 \mathrm{d}m$.
  - ⋆ Enfin, pour un solide on somme sur toutes les petites masses qui le composent :

$$\boxed{J_{Ox} = \int_{M\in\text{solide}} r^2 \mathrm{d}m \qquad [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2]}$$

  r est la distance entre le point M et l'axe Ox (le r des coordonnées cylindriques d'axe Ox).

- **Moment d'une force** par rapport un axe Ox :
  Soit $\vec{F}$ la force, P son point d'application, $\vec{e}_x$ le vecteur qui porte l'axe Ox. On définit :

$$\boxed{\mathcal{M}_{Ox}(\vec{F}) = \left(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{e}_x.}$$

- **Moment cinétique** d'un solide par rapport un axe Ox :
  - ⋆ Pour une masse ponctuelle m repérée par le point M : $\mathcal{L}_{Ox} = \left(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}\right) \cdot \vec{e}_x$.
  - ⋆ Pour un solide on somme sur toutes les petites masses qui le composent, et on montre que l'on aboutit à :

$$\boxed{\mathcal{L}_{Ox} = J_{Ox}\,\dot{\theta},}$$

  avec θ l'angle de rotation du solide autour de l'axe Ox.

- **Énergie cinétique** du solide en rotation autour d'un axe **fixe** Ox :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} J_{Ox} \dot{\theta}^2.}$$

  Remarque : si le solide a un mouvement de translation, et dans son référentiel du centre de masse un mouvement de rotation autour d'un axe fixe Gx (G centre de masse du solide), alors

$$E_c = \frac{1}{2} J_{Gx} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M v_G^2,$$

  avec M la masse totale du solide et v_G la vitesse de son centre de masse.

- **Énergie potentielle de pesanteur :**

$$\boxed{E_{\mathrm{p,pes}} = M g z_G,}$$

  avec z_G l'altitude du centre de masse G du solide (l'axe z est vers le haut).

Théorèmes reliant les grandeurs précédentes

On suppose travailler dans un référentiel galiléen.

- **Théorème du moment cinétique :**

  Le solide est en rotation autour d'un axe Ox fixe. On a :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_{Ox}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{M}_{Ox}.}$$

- **Théorème de l'énergie mécanique :**

  Si toutes les résultantes des forces s'appliquant sur le solide sont conservatives, alors

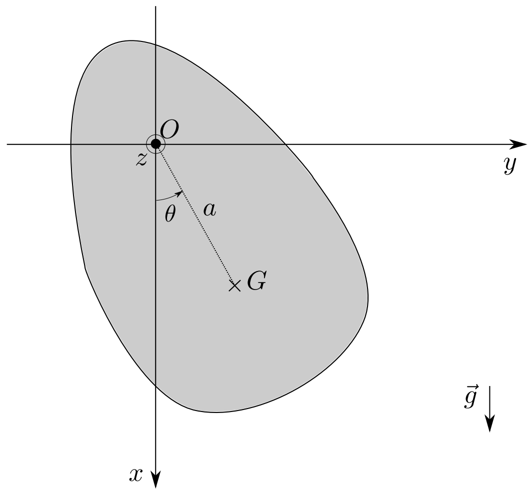
$$\boxed{E_m = E_c + E_p = \text{cst.}}$$

  Remarque : C'est typiquement le cas lorsque le solide est soumis à la pesanteur ($E_{\text{p,pes}} = Mgz_G$), à l'action d'un ressort, et à l'action d'une liaison pivot supposée parfaite (la puissance associée est nulle, l'énergie potentielle également).

II Exercices

1. On pourra regarder à nouveau le DM 7 et sa correction (solide en rotation autour d'un axe, avec ou sans ressort de rappel, afin de mesurer la pesanteur terrestre).

2. On considère un solide en rotation autour d'un axe fixe Ox. La liaison pivot selon cet axe est supposée parfaite. G est le centre d'inertie du solide. Le référentiel d'étude est supposé galiléen.



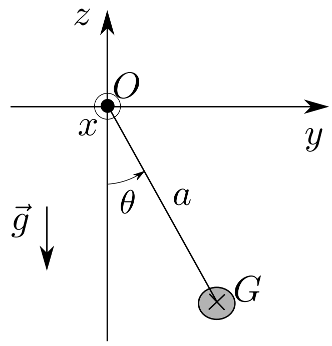
  a. Appliquer le théorème du moment cinétique afin de trouver l'équation du mouvement.

  b. Donner la solution de cette équation dans l'approximation où $\theta(t) \ll 1$. On posera $\theta(t=0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$.

  c. Retrouver l'équation du mouvement, cette fois en utilisant une méthode énergétique.

3. Retour sur la mécanique du point et comparaison :

On considère un pendule dont toute la masse est localisée autour du point G. Le fil reliant O à G est supposé de masse négligeable. On est donc dans un cas de mécanique du point.



  a. Appliquer le théorème du moment cinétique afin de trouver l'équation du mouvement.

  b. Comparer avec le cas précédent du solide.

  c. Retrouver l'équation du mouvement, cette fois en utilisant une méthode énergétique.