

Epreuve de Physique A

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Le problème comporte néanmoins un certain nombre d'évaluations numériques, dont le caractère révèle une certaine importance pour la compréhension de l'ensemble. Dans chaque cas, un ordre de grandeur est attendu, et si possible un résultat avec une décimale au mieux lorsque la simplicité des calculs numériques le permet.

On donne les indications suivantes :

- $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \approx 0,618$
- $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \approx 1,618$
- $\text{Rapport} \frac{1,618}{0,618} = 2,6$
- A une fonction sinusoïdale $u(t) = U \cdot \cos(\omega t + \phi)$, on associe l'expression complexe $\underline{u} = \underline{U} \cdot e^{j\omega t}$ avec $\underline{U} = U \cdot e^{j\Phi}$: amplitude complexe associée à $u(t)$ ($j^2 = -1$).

Au début de chaque partie, son « poids » dans le barème est indiqué en pourcentage.

A- Etude de capteurs capacitifs

(30%)

Ces capteurs utilisent un condensateur comme composant principal.

On rappelle qu'un condensateur est formé de deux armatures conductrices séparées par un isolant électrique. Ici, l'isolant est de l'air, dont les propriétés électriques seront supposées identiques à celles du vide (permittivité ϵ_0).

1) Résultats sur les champs

- Donner les quatre équations de Maxwell en régime stationnaire.
- Donner l'énoncé du théorème de Gauss de l'électrostatique.
- Démontrer ce théorème à partir de la relation de Maxwell-Gauss.

2) Fonctionnement

On applique une tension U aux armatures du condensateur.

- Effectuer un schéma figurant : le condensateur, la tension U (représentée par une flèche) et les charges stockées.
- Rappeler la loi liant la charge du condensateur (Q) et la tension U .
- Expliquer **qualitativement** pourquoi les charges électriques des armatures se condensent sur les portions d'armature se faisant vis-à-vis (appelée surfaces en regard).

3) Capacité du condensateur plan

On s'intéresse ici au cas d'un condensateur à lame d'air constitué de deux armatures planes métalliques en regard l'une de l'autre (aire de chaque armature : S), parallèles, distantes de e , séparées par de l'air (**Fig 1a**). Les armatures en regard portent respectivement les densités surfaciques uniformes de charge $-\sigma$ et $+\sigma$. On considérera les dimensions des armatures beaucoup plus grandes que e , ce qui permet d'utiliser le modèle du condensateur plan illimité (ce qui revient à dire que l'on néglige les effets de bords).

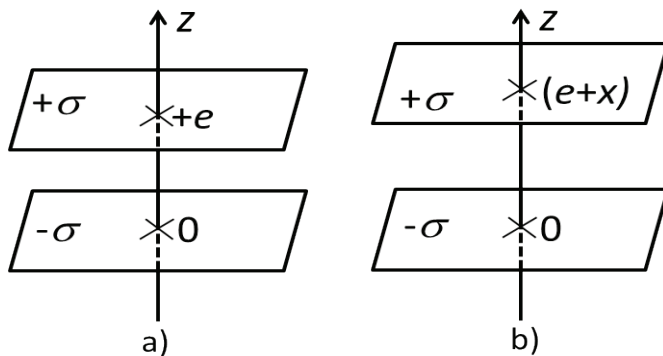


Fig. 1 : Condensateur plan :

a) Position de référence.

b) Position après déplacement de l'armature supérieure d'une quantité algébrique x .

- Reproduire et compléter la **Fig. 1 a)** en dessinant l'allure des lignes orientées du champ électrostatique.
- Déterminer le champ $\vec{E}(M)$ dans tout l'espace en expliquant la méthode utilisée et en donner une représentation graphique $E(z)$.
- En déduire le potentiel électrostatique $V(M)$ (on considérera $V=0$ sur l'armature de densité surfacique négative).
- Représenter graphiquement le potentiel en fonction de z .
- En déduire l'expression littérale de la capacité C_{P0} du condensateur plan.

- f- On envisage maintenant la situation où l'une des deux armatures reste fixe, tandis que l'autre est susceptible de se déplacer en translation d'une quantité algébrique x ($x > -e$) par rapport à sa position de référence ($x=0$) (**Fig. 1 b**) :
- i- Donner l'expression de la nouvelle capacité $C_P(x)$ en fonction de C_{P0} , e , et x .
 - ii- Tracer l'allure de $C_P(x)$ pour $x > -e$ en positionnant correctement les grandeurs remarquables sur les deux axes.
 - iii- On envisage la situation de petits déplacements ($|x| \ll e$) : déterminer une expression approchée au premier ordre de la capacité du condensateur.
 - iv- Tracer la représentation graphique correspondante sur le graphe de la question ii.

4) Condensateur cylindrique :

On considère un condensateur formé de deux armatures cylindriques coaxiales séparées par de l'air, selon le schéma et la légende de la **Fig. 2 a**). L'armature interne porte une charge $-Q$ et l'externe une charge $+Q$; ces charges sont supposées uniformément réparties sur les surfaces.

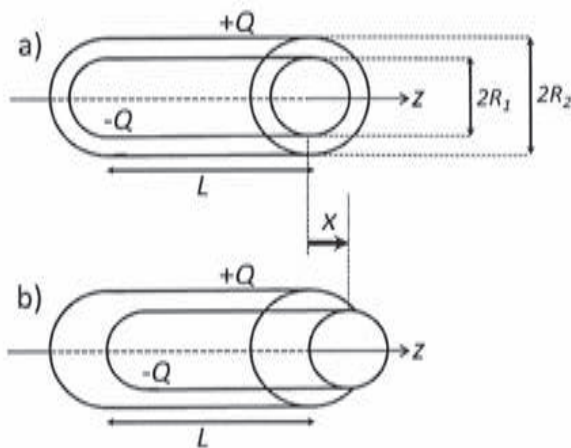


Fig. 2 : Condensateur cylindrique :
a) Position de référence.
b) Position après déplacement de l'armature intérieure d'une quantité algébrique x .

Les données sont : les rayons R_1 et R_2 ; la permittivité ϵ_0 ; la longueur L .

L est beaucoup plus grand que R_2 , de telle sorte que l'on peut adopter un modèle illimité.

- a- Quel est le système de coordonnées spatiale le plus adapté ici ?
- b- Déterminer, en justifiant qualitativement mais de manière précise, la direction, le sens du champ électrostatique et les coordonnées dont dépend son module.
- c- Par application du théorème de Gauss, déterminer le champ en tout point de l'espace en fonction de Q et des données.

Reproduire et compléter le tableau ci-dessous avec les expressions littérales dans chaque zone de l'espace :

r	0	R_1	R_2	∞
$\ \vec{E}\ $				

- d- En déduire le potentiel électrostatique V (on impose $V=0$ sur l'armature intérieure), puis la différence de potentiel entre l'armature externe et l'armature interne.
- e- Déterminer C_{C0} la capacité du condensateur sous la forme $C_{C0} = A_c \cdot L_r$ où L_r est la longueur des portions de cylindre en regard (ici $L_r=L$). Expliciter A_c en fonction des données.
- f- L'armature intérieure du condensateur est susceptible de se déplacer d'une distance algébrique x par rapport à sa position de référence, selon le schéma de la **Fig. 2 b**).

On rappelle que les charges se condensent sur les portions d'armatures en regard. Déterminer l'expression littérale de la capacité $C_C(x)$ associée à une position x donnée du cylindre intérieur en fonction de C_{CO} , L , et x .

- g- Tracer l'allure de $C_C(x)$ en positionnant correctement les grandeurs remarquables (pentes et valeurs sur les axes).
- h- Dans la perspective de la mesure d'un déplacement x , quelles sont les différences notables entre $C_P(x)$ et $C_C(x)$?

5) Montage potentiométrique :

Les variations de capacité $C(x)$ sous l'effet du déplacement de l'une des deux armatures doivent être converties en tension de manière à pouvoir être traitées par un organe de décision ou transmises à un circuit électronique. On envisage ici une solution utilisant le montage potentiométrique de la **Fig. 3**, alimenté par la tension $e(t) = E \cdot \cos(\omega t)$.

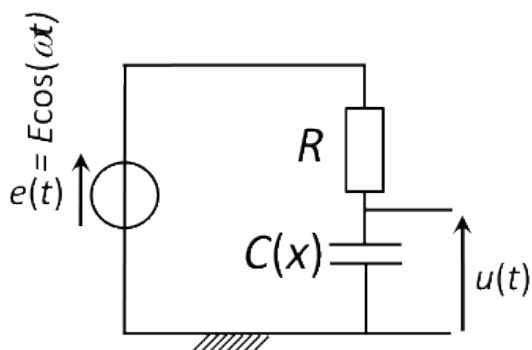


Fig. 3 : Montage potentiométrique de conversion du déplacement x en tension $u(t)$.

La tension $e(t)$ d'alimentation possède une amplitude E et une pulsation ω .

On s'intéressera en particulier à la sensibilité du capteur, définie par la relation $\sigma_Y = dY/dx$, où Y représente la grandeur de sortie exploitée (amplitude U ou phase φ de la tension $u(t)$), dont on souhaite idéalement qu'elle soit à la fois élevée et indépendante de x .

- a. $u(t)$ s'exprimant sous la forme $u(t) = U \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, déterminer les expressions littérales de U et φ en fonction de E , C , R et ω .
- b. En déduire les sensibilités σ_U et σ_φ , en fonction de $C(x)$, $dC(x)/dx$, R , E , et ω .
- c. On envisage ici l'insertion du condensateur cylindrique étudié en question 4) :
 - i- Indiquer, en justifiant votre réponse si les deux sensibilités σ_U et σ_φ correspondantes sont ou non indépendantes de x .
 - ii- L'amplitude E de la tension d'entrée $e(t)$ est susceptible de varier. Quelles sont les conséquences respectives sur σ_U et σ_φ ?
 - iii- Laquelle des deux grandeurs de sortie U ou φ a-t-on finalement intérêt à exploiter et pourquoi ?

6) Condensateur double

On complète maintenant le capteur à géométrie cylindrique en symétrisant la structure selon le schéma de la **Fig. 4**. Cela permet notamment de minimiser les effets de bords négligés jusque-là mais présents en pratique. La partie mobile en translation, selon un déplacement algébrique x , correspond à l'armature cylindrique intérieure du condensateur cylindrique double ; il en résulte deux capacités C_1 et C_2 dont les valeurs dépendent de x , soit $C_1 = C_1(x)$ et $C_2 = C_2(x)$.

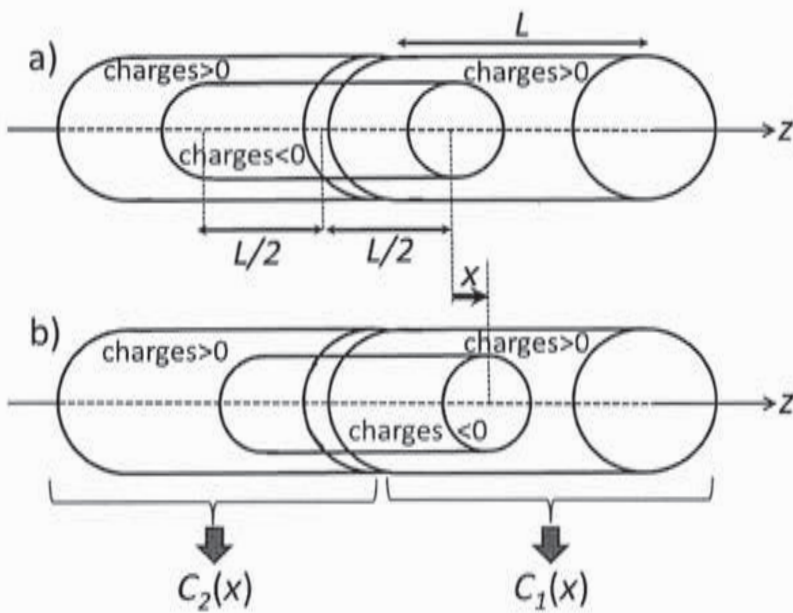


Fig. 4 : Condensateur cylindrique double : à deux armatures externes et une armature interne.

- a) Position de référence.
- b) Position après une translation x .

- a. Déterminer les longueurs $L_1(x)$ et $L_2(x)$ des portions de cylindre en regard et en déduire, en utilisant les résultats de la question 4)e, les expressions littérales de $C_1(x)$ et de $C_2(x)$.
- b. Représenter sur le même graphe les allures de $C_1(x)$ et de $C_2(x)$. Quelle particularité peut-on constater ?

7) On insère ce condensateur double dans le montage en pont représenté sur la **Fig. 5** :

- i- Déterminer l'expression littérale de l'amplitude complexe \underline{U} associée à la tension $u(t)$ en fonction de E , C_1 , et C_2 .
- ii- En déduire, compte tenu de la question 7i, la relation liant l'amplitude U de $u(t)$ à E , L et x .
- iii- Déterminer l'expression littérale de la sensibilité σ_U ainsi obtenue et commenter le résultat.
- iv- Quelle information sur le déplacement le déphasage de $u(t)$ par rapport à $e(t)$ fournit-il ?

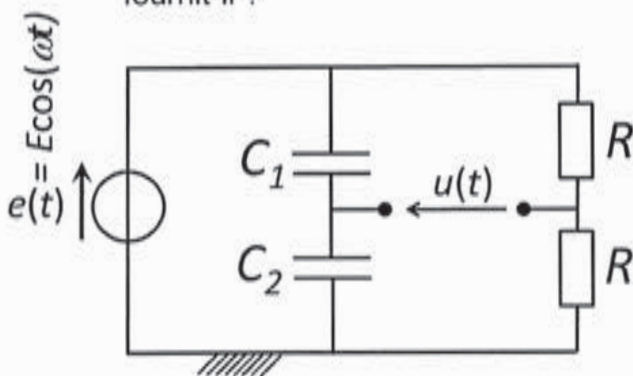


Fig. 5 : Montage en pont visant à extraire une tension $u(t)$ image du déplacement spatial x de l'armature interne du condensateur double de la **Fig. 4**.

B) Etude d'un capteur inductif

(12%)

Dans cette partie, on s'intéresse au fonctionnement d'un capteur inductif de déplacement. Le capteur utilise une bobine d'auto-induction. On s'intéresse dans un premier temps au champ magnétique créé par un solénoïde dans l'air, puis à partir de là au capteur lui-même, obtenu en insérant une partie mobile à l'intérieur du solénoïde.

- 1) On considère un solénoïde de longueur l_0 et de rayon R recouvert de N spires jointives bobinées sur un cylindre rempli d'air, dans lesquelles circule un courant électrique d'intensité I (**Fig. 6**). On considérera que les propriétés magnétiques de l'air sont celles du vide et que le champ magnétique sur l'axe du solénoïde est donné en norme par la relation $B = \mu_0(N/l_0)I$. Tous les calculs de champ magnétique seront menés dans l'approximation du solénoïde illimité.

Les données sont : R, N, I, μ_0 et l_0 .

- Donner l'énoncé du théorème d'Ampère.
- Donner l'allure des lignes de champ magnétique d'un solénoïde de longueur l_0 (les directions et sens de ces lignes seront justifiées).
- Démontrer que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est nul (modèle du solénoïde illimité).
- A partir du théorème d'Ampère, déterminer complètement le champ magnétique en tout point intérieur au solénoïde.
- En déduire l'expression littérale du coefficient d'auto-inductance L_0 du solénoïde, après en avoir rappelé la définition générale.

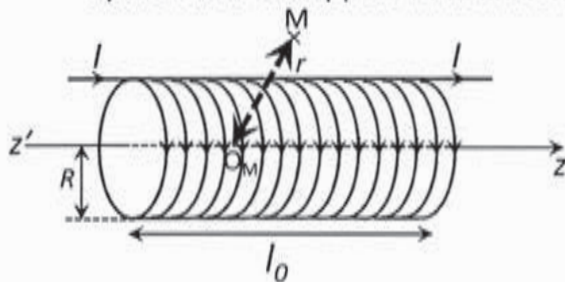


Fig. 6 : Solénoïde de longueur l_0 , constitué de N spires jointives bobinées sur un cylindre de rayon R rempli d'air, dans lesquelles circule un courant I et étudié dans l'approximation du solénoïde infini. r désigne la distance à l'axe d'un point M au niveau duquel on cherche à évaluer le champ B .

2°) Le capteur étudié est représenté sur la **Fig. 7**. Une partie mobile de longueur l_0 , appelée noyau, peut se déplacer en translation à l'intérieur du solénoïde initialement rempli d'air. Pour la suite de l'étude, nous admettrons les résultats suivants :

- L'insertion d'un noyau à l'intérieur d'un solénoïde conduit à une modification de son coefficient d'auto-inductance : l'inductance en présence du noyau est le produit de l'inductance dans l'air par un facteur multiplicatif δ ($\delta > 1$).
- Le coefficient d'auto-inductance du capteur peut être évalué comme celui résultant de la mise en série de deux solénoïdes :
 - Le premier, de longueur x , est rempli d'air.
 - Le deuxième, de longueur $l_0 - x$, contient le noyau.

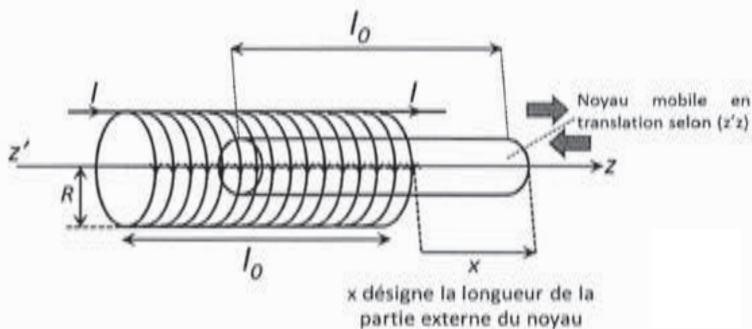


Fig. 7 : Capteur magnétique à insertion d'un noyau au sein du solénoïde de la **Fig. 6** initialement rempli d'air.

- a- Déterminer en fonction de N , l_0 et x , le nombre N_1 de spires de la partie gauche du solénoïde sans noyau et celui (N_2) de la partie droite avec le noyau interne.
- b- En déduire l'inductance propre de chaque partie puis l'inductance $L(x)$ en fonction de δ , L_0 , l_0 et x .
- c- Représenter graphiquement $L(x)$ en fonction de x si $0 < x < l_0$.

C) Oscillateur mécanique

(25%)

On s'intéresse dans cette partie au système décrit sur la **Fig. 8**. Deux objets identiques de masse m se déplacent sans frottement sur un axe ($x'x$). Le premier est une masselotte, tandis que le deuxième correspond à la partie centrale du capteur capacitif de la **Fig. 4**.

D'un point de vue mécanique, ces deux objets seront supposés ponctuels pour toute la suite de cette partie C), de même masse m , positionnés respectivement aux points M_1 et M_2 . Le point M_1 est accroché à un point fixe O par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_{R0} tandis que le point M_2 est accroché à M_1 par l'intermédiaire d'un ressort identique au précédent.

Le condensateur cylindrique double est positionné de telle manière que son armature centrale soit ajustée à sa position de référence à l'équilibre du système mécanique.

Dans les conditions de fonctionnement du système, les forces d'attraction électrostatiques entre les armatures fixe et mobile seront complètement négligées. Les points M_1 et M_2 sont repérés sur l'axe par leurs abscisses respectives $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Les données sont : m , k et l_{R0} .

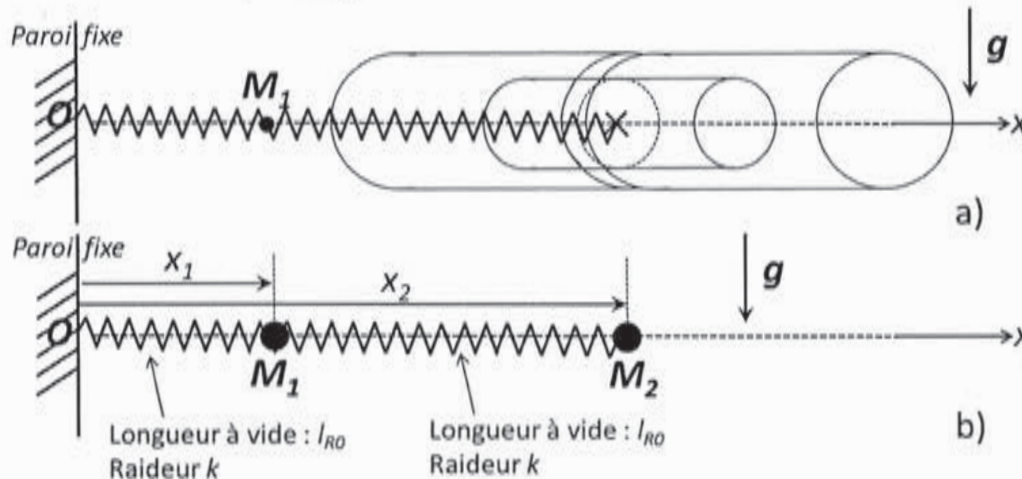


Fig. 8 : Système mécanique étudié : a) Description comprenant la masselotte en M_1 et le capteur capacitif à condensateur cylindrique étudié en partie A), b) Système mécanique équivalent à partir duquel les raisonnements de la partie C) seront menés.

1) Repos :

- a- Déterminer les positions de repos x_{10} et x_{20} en fonction des données.
- b- Les ressorts sont linéaires : leur tension est proportionnelle à leur allongement. Exprimer, en fonction de x_1 , x_2 et des données, le module des tensions mécaniques T_1 et T_2 .

2) Mouvements de M_1 et de M_2 :

- a- Etudier le mouvement de M_2 et montrer que l'équation différentielle vérifiée par $x_2(t)$ est de la forme $\ddot{x}_2 + Ax_2 = Bx_1 + C$ (vous identifierez A, B, C en fonction des données).
- b- Etudier le mouvement de M_1 et montrer que l'équation différentielle vérifiée par $x_1(t)$ est de la forme $\ddot{x}_1 + Dx_1 = Ex_2 + F$ (vous identifierez D, E, F en fonction des données).

3) En posant $XX_1(t) = x_1(t) - x_{10}$ et $XX_2(t) = x_2(t) - x_{20}$, on obtient le système d'équation suivant :

($\omega_o^2 = k/m$) : $\frac{d^2 XX_2}{dt^2} = -\omega_o^2(XX_2 - XX_1)$, $\frac{d^2 XX_1}{dt^2} = -\omega_o^2(2XX_1 - XX_2)$ et l'on envisage la situation où les deux points vibrent avec la même pulsation Ω : $XX_1(t) = X_{m1} \cos(\Omega t + \varphi_1)$ et $XX_2(t) = X_{m2} \cos(\Omega t + \varphi_2)$.

- a- Montrer que l'on obtient les expressions suivantes [X_{m1} et X_{m2} sont les amplitudes

$$\begin{aligned} (2\omega_o^2 - \Omega^2)X_{m1} - \omega_o^2 X_{m2} &= 0 \\ -\omega_o^2 X_{m1} + (\omega_o^2 - \Omega^2)X_{m2} &= 0 \end{aligned}$$

complexes associées à $XX_1(t)$ et $XX_2(t)$ (voir page 1)] :

- b- Montrer alors que ce mouvement n'est possible que pour deux valeurs de pulsation

Ω_1 et $\Omega_2 < \Omega_1$ à expliciter en fonction de ω_o (voir valeurs page 1).

4) La loi générale du mouvement de M_2 est de la forme :

$XX_1(t) = A_1 \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\Omega_2 t + \varphi_2)$ et $XX_2(t) = A_1 \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\Omega_2 t + \varphi_2)$:

A_1, A_2, φ_1 et φ_2 dépendant des conditions initiales.

- a. Les deux masses sont initialement au repos : en déduire les valeurs de φ_1 et φ_2 .

- b. Le protocole expérimental permet de choisir les valeurs de $x_1(0)$ et $x_2(0)$:

- i. On considère d'abord $x_1(0) = 1,5 l_{R0}$ et $x_2(0) = 2,5 l_{R0}$:

1. Déterminer les expressions littérales de A_1 et A_2 .
2. A quelle fréquence oscillent les deux ressorts ?
3. Que peut-on dire de $XX_1(t)$ et de $XX_2(t)$? Quel nom donneriez-vous à ce type de solution ?
4. Donner l'expression littérale de $XX_2(t)$.

- ii. On considère maintenant $x_1(0) = 1,5 l_{R0}$ et $x_2(0) = 1,5 l_{R0}$:

1. Déterminer les expressions littérales de A_1 et A_2 .
2. A quelle fréquence oscillent les deux ressorts ?
3. Que peut-on dire de $XX_1(t)$ et de $XX_2(t)$? Quel nom donneriez-vous à ce type de solution ?
4. Donner l'équation horaire littérale de $XX_2(t)$.

D. Analyse des signaux par oscilloscope

(13%)

- Le montage de la Fig. 5 permet d'obtenir la tension $u(t)$ comme produit de deux composantes « électrique » [$B \cdot \cos(\omega t)$] et « mécanique » [XX_2] : $u(t) = B \cos(\omega t) \cdot XX_2(t)$.
- La tension $u(t)$ est acquise par un oscilloscope numérique.

Lorsque $XX_2(t)$ correspond aux cas i. et ii. de la question C 4)b), on obtient les enregistrements de la Fig. 9 avec $\Omega_2 < \Omega_1 < \omega$.

1) Spectre de $u(t)$:

a- Montrer que la tension $u(t)$ peut s'interpréter comme une tension haute fréquence dont l'amplitude est modulée sinusoïdalement en basse fréquence.

b - Représenter graphiquement le spectre de Fourier de $u(t)$ si $XX_2(t) = \frac{I_{R0}}{2} \cos(\Omega_1 t)$.

c- Représenter de même ce spectre si $XX_2(t) = -\frac{I_{R0}}{2} \cos(\Omega_2 t)$.

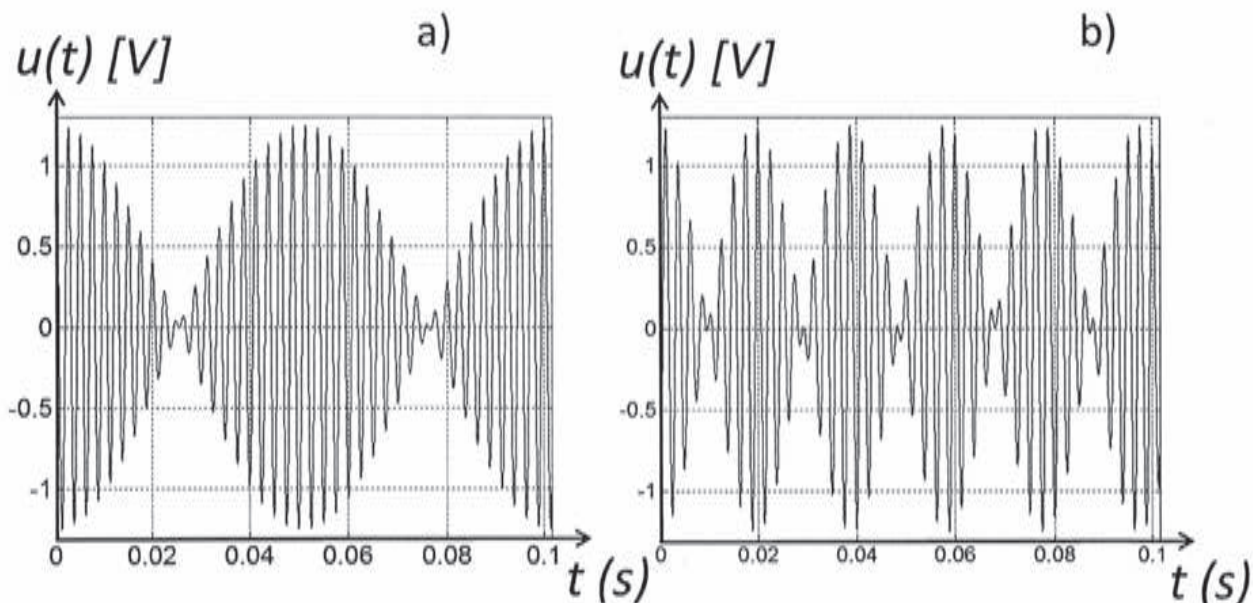


Fig. 9 : Chronogrammes relevés à l'oscilloscope : a) pour $XX_2(t) = (I_{R0}/2) \cdot \cos(\Omega_1 t)$, b) $XX_2(t) = -(I_{R0}/2) \cdot \cos(\Omega_2 t)$.

2) Exploitation des chronogrammes :

a- Déterminer, à partir de l'enregistrement de la Fig. 9) a, et en expliquant votre manière de procéder en cinq lignes maximum :

- i- La fréquence f_e de la partie « électrique » de $u(t)$.
- ii- La fréquence f_m de la partie « mécanique » de $u(t)$.

b- Faire de même pour l'enregistrement de la Fig. 9)b.

c- En déduire les pulsations Ω_2 et Ω_1 mesurées.

d- Les valeurs mesurées sont elles cohérentes avec les résultats de C 3)b ?

E) Conditionnement des signaux par oscillateur

(20%)

L'information de déplacement en provenance des capteurs capacitifs et inductifs, tels que ceux étudiés dans les parties A) et B), peut également être extraite à partir d'un oscillateur électronique. Dans ce cas, l'information de déplacement, qui induit une modification de L ou C est source d'une modification de la fréquence de résonance de l'oscillateur, aisément détectable, par exemple à l'aide d'un fréquencemètre.

On considère le montage électronique de la Fig. 10.

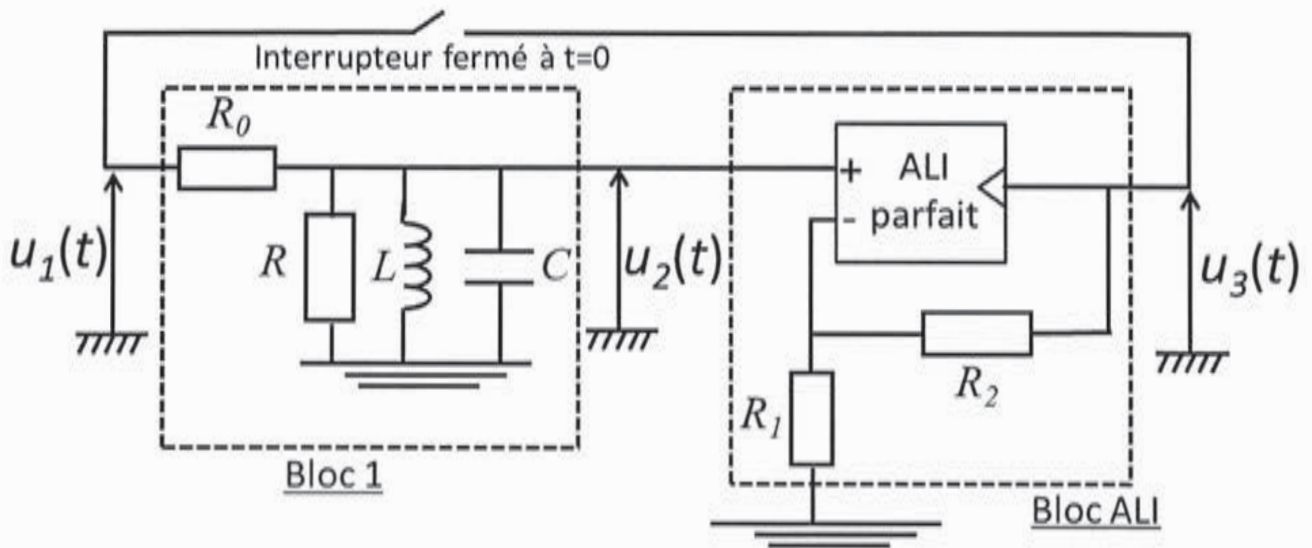


Fig. 10 : Montage envisagé pour extraire l'information issue d'un capteur. L'ALI utilisé, que l'on supposera parfait, est alimenté au moyen d'une alimentation symétrique $\pm V_{CC} = \pm 12V$ et sa tension de saturation est $V_{SAT} = 11V$.

1) Etude du bloc 1

Le bloc 1 réalise un filtre de fonction de transfert complexe $H = \frac{u_2}{u_1}$

$$H = \frac{A_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})} \text{ avec } A_0 = 0,1 ; Q=25 ; x = \frac{\omega}{\omega_0} ; \log(25) \approx 1,4.$$

- Donner les équations des deux asymptotes hautes et basses fréquences du gain en décibels de ce filtre.
- Représenter le diagramme de Bode (en amplitude uniquement) donnant ce gain en décibels en fonction de $\log(x)$.
- Préciser la nature de ce filtre.
- Exprimer, à partir du schéma du bloc 1, le fonction de transfert H en fonction ω et des valeurs caractéristiques des composants de ce bloc 1. Par identification, donner les expressions littérales de ω_0 et Q en fonction des valeurs caractéristiques des composants.

2) Etude du bloc bloc ALI

- Déterminer l'expression littérale de la fonction de transfert complexe $G = \frac{u_3}{u_2}$.
- On pose $K = |G|$. Exprimer K en fonction de R_1 et R_2 .

3) Système bouclé

On ferme l'interrupteur, réalisant ainsi un système bouclé.

- Déduire des questions précédentes l'équation différentielle vérifiée par u_3 .
- A partir de cette équation :
 - Trouver une condition liant A_0 , K et Q pour que s'établissent des oscillations quasi sinusoïdales.
 - Déterminer alors la fréquence f_0 de ces oscillations.
- Toujours à partir de l'équation différentielle de u_3 , montrer que la naissance d'oscillations impose des conditions sur le produit $A_0 K$ et les expliciter.

4) On choisit les composants de manière à obtenir l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 u_3}{dt^2} - 10^4 \frac{du_3}{dt} + 9 \cdot 10^8 u_3 = 0$$

- a- Donner l'expression numérique de u_3 en fonction de t sans chercher à calculer les constantes dépendant des conditions initiales.
- b- Montrer que l'on obtient des oscillations dont l'amplitude A varie temporellement.
- c- Exprimer et représenter A en fonction de t .
- d- Dans la pratique, on obtient une stabilisation de l'amplitude à une valeur A_{max} ; expliquer pourquoi et expliciter A_{max} .
- e- Compte tenu de ce qui précède, représenter l'allure de $u_3(t)$.

5) On utilise le dispositif complet pour suivre les déplacements x de la partie mobile d'un capteur capacitif dont la capacité est donnée par la loi $C=C_0(1-x/l)$, avec $C_0=10\mu\text{F}$ et $l=10\text{mm}$. Ce capteur forme le condensateur du bloc 1 de la **Fig. 10**.

- Les composants choisis sont tels que le montage oscille à une fréquence f_{osc} liée à la capacité C par la relation : $f_{osc} = \frac{D}{\sqrt{C}}$, avec $D=1 \text{ H}^{1/2}$.
- A la position de référence du capteur ($x=0$), la fréquence d'oscillation est f_{or} .
 - a. Montrer que, pour un petit déplacement x ($x/l \ll 1$), la fréquence d'oscillation peut se mettre sous la forme $f_{osc} \approx a.x+b$, et expliciter a et b en fonction des données.
 - b. On note $\Delta f = f_{osc} - f_{or}$ la variation de fréquence liée à un déplacement. La plus petite variation détectable est $\Delta f_{min} = 3\text{Hz}$; quel est le plus petit déplacement détectable ?

=====

FIN DE PROBLEME

=====

