

# — Étude de la chute d'un moule en papier en travaux pratiques

par Mickaël MELZANI<sup>1</sup>

Physique-chimie, PTSI, Raoul Follereau, Belfort

## Résumé

Cet article présente une expérience utilisable en séance de TP : l'étude de la chute libre d'un petit moule en papier, filmée à l'aide des téléphones des étudiants. L'analyse de la phase stationnaire du mouvement (vitesse limite) permet d'exclure une loi de frottement proportionnelle à la vitesse, et est compatible avec des frottements quadratiques. Le coefficient de traînée en est déduit. L'analyse de la phase transitoire (accélération) montre que les moules sont trop légers pour pouvoir négliger l'inertie de la masse d'air qu'ils doivent mettre en mouvement pour accélérer. Ce concept de masse ajoutée est discuté.

## I Introduction

L'expérience consiste à faire chuter de petits moules à gâteau en papier (figure 2.1), à filmer la chute et à l'analyser pour en extraire la trajectoire. La caméra utilisée est celle d'un smartphone (celui des étudiants en TP). La vidéo est rapatriée sur l'ordinateur et analysée avec Tracker, Aviméca, Latispro ou tout autre logiciel de suivi de trajectoire.

**Notations et valeurs** ( $u$  est l'incertitude-type,  $\Delta = \sqrt{3}u$  est la demi-étendue d'incertitude) :

- Masse d'un moule :  $m_1 = 0,14$  g,  $u(m_1) = 6$  mg.
- Rayon supérieur du moule :  $R = 2,2$  cm,  $\Delta(R) = 0,2$  cm et  $u(R) = 0,12$  cm.
- Section du moule  $S = \pi R^2$ .
- Pesanteur  $g = 9.8$  m s<sup>-2</sup>.
- Masse volumique de l'air :  $\rho = 1.2$  kg m<sup>-3</sup>.

---

1. mickael.melzani@gmail.com;  
site web : <https://mmelzani.fr>

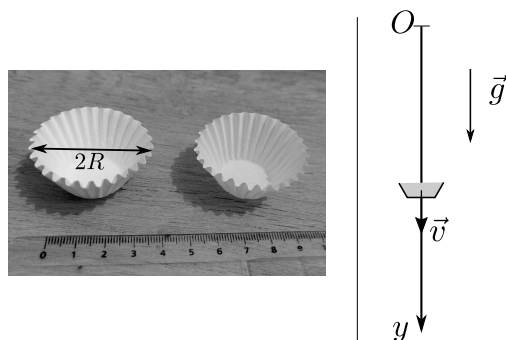


FIGURE 2.1 – Photographie de moules en papier. Schématisation de l'expérience.

— Coefficient de traînée  $C$ .

— Nombre de Reynolds  $Re = \frac{2Rv}{\nu} = 2500$  pour  $R = 2$  cm et  $v = 1$  m s<sup>-1</sup>.

Quelques détails sur l'estimation des incertitudes. La masse de 100 moules a été obtenue sur une balance à 1 g, pour laquelle  $\Delta(100m_1) \approx 1$  g, d'où  $\Delta(m_1) = 10$  mg. L'incertitude sur le rayon  $R$  provient des cannelures : rayon intérieur de 20 mm et extérieur de 24 mm. De plus, par empilement, les moules peuvent s'élargir un peu.

Remarquons que différents “modèles” de moules existent dans le commerce, plus ou moins large. L'influence de ce choix est discutée dans la suite.

Nous présentons la mise en équations (partie II), l'acquisition et l'exploitation de données “professeur” (phase stationnaire partie III, phase transitoire partie IV, conclusion partie V), et enfin des résultats de TP avec les élèves (partie VI). Une annexe présente les scripts de régression linéaire (et non affine, partie VII).

Enfin, je remercie Arthur Lavarelo et les collègues de MPSI du lycée Corneille de Rouen, pour l'idée du TP, pour le partage des documents, et pour les conseils avec les étudiants.

## II Mise en équation

Prenons un axe  $y$  descendant,  $y = 0$  et  $t = 0$  repèrent le lâché sans vitesse initiale du moule (figure 2.1). On note  $v = \dot{y}$ . Le moule est soumis à la pesanteur et aux frottements de l'air :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{2} C \rho S v^2, \quad (1)$$

avec  $C$  le coefficient de traînée.

L'objectif du TP est de tester si ce modèle pour la force de frottement convient pour décrire les expériences, d'abord dans la phase en régime stationnaire ( $v = v_{\text{lim}}$  constante), puis pour la phase transitoire.

### III Phase stationnaire

#### III.1 La loi à tester

Lorsque la vitesse devient constante, l'équation du mouvement donne l'expression de la vitesse atteinte :

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho S}}. \tag{2}$$

On mesure  $v_{\text{lim}}$  sur les enregistrements, d'abord pour un moule, puis pour deux moules emboîtés l'un dans l'autre, puis pour trois moules emboîtés, etc. Pour  $N$  moules, la masse s'écrit  $m = N \times m_1$ , alors que la section  $S$  ne change pas. La vitesse limite vérifie donc, d'après le modèle :

$$v_{\text{lim}}^2 = N \times \frac{2m_1g}{C\rho S}. \tag{3}$$

#### III.2 Les expériences

On filme avec un smartphone, situé à 90 cm au dessus du sol et à 1,9 m du plan de la chute. Le moule est lâché à environ 2,2 m du sol. Le pointage des positions  $y [i]$  est fait à la main sur la vidéo à l'aide de Tracker Online. On n'exploite pas la zone à moins de 20 cm du sol, ce qui laisse une marge de sécurité pour se prémunir d'un effet du sol sur l'écoulement. La vitesse est obtenue par différence finie :  $(y [i+1] - y [i-1]) / (t [i+1] - t [i-1])$  (soit en Python, soit directement par le logiciel de pointage). Les courbes sont présentées figure 2.2.

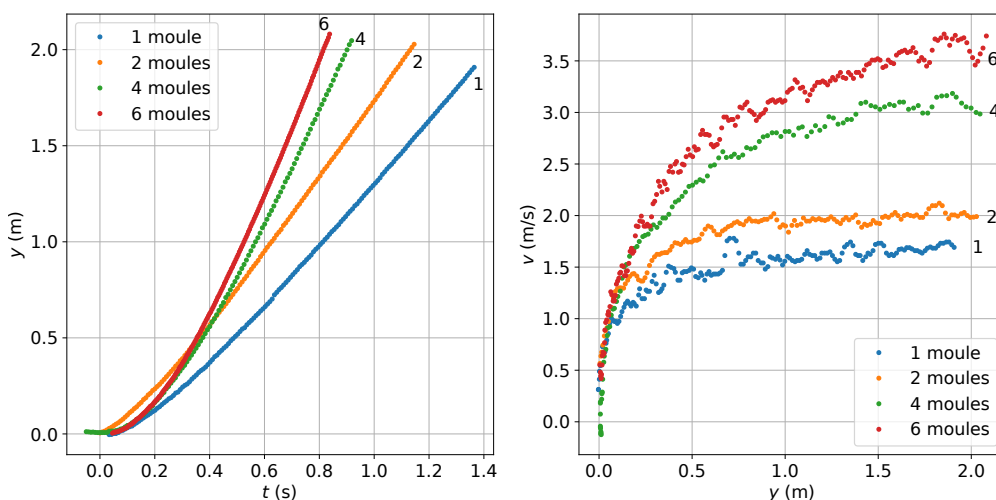


FIGURE 2.2– Position  $y(t)$  et vitesse  $v(y)$ . La vitesse est lissée par moyenne glissante sur 5 points.

La vitesse limite est lue sur le tracé de  $v$ . Il faut prendre garde au fait que la distance  $y_{\text{lim}}$  au bout de laquelle elle est atteinte est assez longue. On relève le tableau suivant (avec  $y_{\text{lim}}$  donné pour information mais non exploité dans la suite) :

Nombre de moules	$v_{\text{lim}}$	$y_{\text{lim}}$
1	$1.65 \text{ m s}^{-1}$	1.2 m
2	$2.0 \text{ m s}^{-1}$	1.2 m
4	$3.1 \text{ m s}^{-1}$	1.5 m
6	$3.7 \text{ m s}^{-1}$	> 1.6 m

La demi-étendue d'incertitude  $\Delta(v_{\text{lim}})$  sur les vitesses est estimée à  $0.1 \text{ m s}^{-1}$ , car les graphiques de  $v(t)$  ou  $v(y)$  sont bruités, et une certaine plage de valeurs semble raisonnable pour  $v_{\text{lim}}$ . De plus, la distorsion de l'objectif peut atteindre quelques pourcents près du sol, loin du centre de l'image (cf. note de bas de page p. 17). Ceci donne :

$$u(v_{\text{lim}}) = \frac{\Delta(v_{\text{lim}})}{\sqrt{3}} = 0.06 \text{ m s}^{-1}. \quad (4)$$

Une autre façon d'estimer cette incertitude est de répéter les mesures et de calculer  $u(v_{\text{lim}})$  via l'écart-type expérimental. Un collègue a obtenu (avec des moules environ deux fois plus gros), en  $\text{m s}^{-1}$  :

$v = [1.287, 1.225, 1.106, 1.056, 1.155]$ , soit  $u(v_{\text{lim}}) = \sigma_{n-1} = 0.09 \text{ m s}^{-1}$ , comparable à notre estimation de type B.

Il faut prendre garde aux valeurs élevées de la distance  $y_{\text{lim}}$  à partir de laquelle  $v$  devient environ constante lors d'un TP. Par analyse dimensionnelle, on s'attend à :

$$y_{\text{lim}} \propto \frac{v_{\text{lim}}^2}{g} \propto \frac{Nm_1}{S}. \quad (5)$$

Ceci sera confirmé par une résolution de l'équation plus loin dans l'article<sup>2</sup>. Cette distance augmente donc avec le nombre  $N$  de moules et, à  $N$  fixé, comme  $m_1/S$ . Par exemple pour des moules deux fois plus grands,  $m_1$  double et  $S$  est multipliée par 4 :  $y_{\text{lim}}$  est divisé par deux. Il peut donc être avantageux d'utiliser des modèles plus grands (rayon et masse plus importants). En plus de réduire  $y_{\text{lim}}$ , ceci réduit aussi  $v_{\text{lim}}$  et rend le pointage plus simple.

### III.3 Comparaison avec la théorie

On réalise un tracé de  $v_{\text{lim}}^2$  en fonction du nombre de moules  $N$  et, pour comparaison, un tracé de  $v_{\text{lim}}$  en fonction de  $N$  (figure 2.3). Un modèle linéaire est testé (donc avec ordonnée à l'origine imposée, cf annexe pour les scripts Python).

Le modèle linéaire semble compatible avec les données pour le cas de  $v_{\text{lim}}^2$  en fonction du nombre de moules  $N$ . Ainsi, pour la phase stationnaire et pour cette gamme de vitesses,

2. L'expression théorique (18) permet d'obtenir l'instant au bout duquel  $v = 0,95v_{\text{lim}}$ , puis d'injecter celui-ci dans l'expression de  $y$  :

$$y_{95\%} = 1,16 \frac{v_{\text{lim}}^2}{g} = 1,16 \frac{2m}{C\rho S}. \quad (6)$$

De plus, nous verrons que  $g$  doit être remplacé ci-dessus par  $a_0$ , ce qui donne :

$$y_{95\%} = 1,16 \frac{v_{\text{lim}}^2}{a_0} = 1,16 \frac{2(m_a + m)}{C\rho S}, \quad (7)$$

avec  $C \approx 0,7$  et  $m_a = C_a \rho R^3$  ( $C_a = 7,5$  à  $9,5$  chez nous,  $\approx 3,5$  chez [1]). La masse d'air ajoutée allonge encore la phase transitoire.

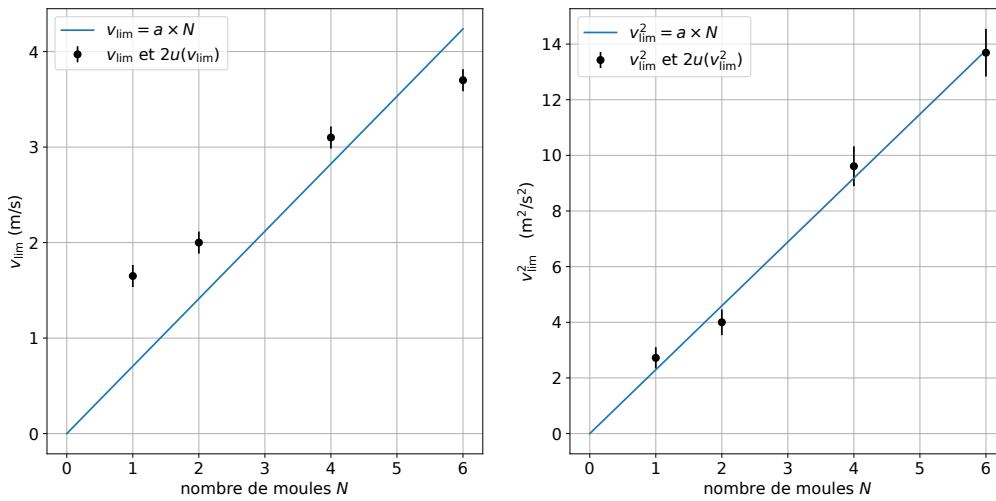


FIGURE 2.3– Gauche :  $v_{lim}$  en fonction de  $N$ . Le modèle linéaire est rejeté. Droite :  $v_{lim}^2$  en fonction de  $N$ . Le modèle linéaire est acceptable. Les incertitudes affichées sont deux fois les incertitudes types :  $2 \times u(v_{lim}^2) = 2 \times 2 v_{lim} u(v_{lim})$ .

une loi en  $v^2$  pour les frottements fluides, avec un coefficient de traînée  $C$  relativement constant, semble appropriée.

Exploitions la pente  $a$  pour obtenir  $C$ . Le modèle donne  $a = 2.30 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$  et  $u(a) = 0.05 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ . D'après l'équation (3),  $a = \frac{2m_1 g}{C \rho S}$ . Donc :

$$C = \frac{2m_1 g}{a \rho S} = 0,69. \tag{8}$$

Avec :

$$u(C) = C \times \sqrt{\left(\frac{u(m_1)}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{2Ru(R)}{R^2}\right)^2} = 0,08 \tag{9}$$

(c'est l'incertitude sur le rayon qui domine assez largement).

### III.4 Conclusion

L'article [1] valide également une loi de frottement en  $v^2$  pour la phase stationnaire, et obtient une valeur de  $C$  comparable, avec le même protocole qu'ici (mais une mesure plus précise de  $y(t)$  par capteur à ultrasons). Un collègue obtient également une valeur de  $C$  compatible, en répétant la mesure pour la chute d'un moule uniquement (donc sans test de la loi).

Étude	rayon $R$	masse $m$	$C$	$u(C)$
Ici	2,2 cm	0,14 g	0,69	0,08
Collègue	3,7 cm	0,25 g	0,70	0,04
[1]	7,5 cm	0,86 g	0,71	0,02

Cette validation “coté professeur” est importante car, lors d'un TP avec les étudiants, la loi à tester et son domaine de validité doivent être bien compris par l'enseignant. Les étudiants conduisent en général l'expérience avec une variabilité bien plus importante que celle de l'enseignant, et commettent leur lot d'erreurs fautives qui rendent la loi moins convaincante (partie VI).

## IV Phase transitoire

L'étude de la phase transitoire, facultative en TP avec les étudiants, est plus complexe.

### IV.1 La loi à tester

L'équation du mouvement peut aussi s'écrire :

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{1}{2m} C \rho S v^2 = g \left( 1 - \frac{v^2}{v_{\text{lim}}^2} \right). \quad (10)$$

En posant  $u = v/v_{\text{lim}}$  et  $\tau = v_{\text{lim}}/g$ , on obtient :

$$\frac{du}{dt} = \frac{1-u^2}{\tau}. \quad (11)$$

Ceci se résout exactement :

$$\frac{du}{1-u^2} = \frac{dt}{\tau} \Rightarrow d(\operatorname{arctanh} u) = \frac{dt}{\tau}, \quad (12)$$

soit donc  $\operatorname{arctanh} u = t/\tau$ , puis  $u = \tanh(t/\tau)$ .

On obtient la position via  $\dot{y} = v = v_{\text{lim}} u = v_{\text{lim}} \tanh(t/\tau)$ , d'où  $y(t) = v_{\text{lim}} \tau \ln(\cosh t/\tau)$ .

Bilan :

$$\boxed{v(t) = v_{\text{lim}} \tanh\left(\frac{t}{v_{\text{lim}}/g}\right) \text{ et } y(t) = \frac{v_{\text{lim}}^2}{g} \ln\left(\cosh \frac{t}{v_{\text{lim}}/g}\right)}. \quad (13)$$

### IV.2 Les expériences

Les expériences sont les mêmes, mais on exploite toute la courbe. Les relations (13) ne dépendent que du paramètre  $v_{\text{lim}}$ , qui a déjà été estimé. On peut donc essayer de tracer ces expressions théoriques et de les comparer aux données expérimentales.

On constate sur la figure 2.4 que l'accord n'est pas satisfaisant pour 1 moules et pour 4 moules. Il est raisonnable pour 6 moules. L'écart théorie - expérience est donc d'autant moins bon que la masse totale (le nombre de moules) est petite. L'accord reste similairement mauvais même si on tente un fit par la fonction théorique  $y(t)$  avec  $v_{\text{lim}}$  comme paramètre libre (alors que sur les ajustements de la figure 2.4,  $v_{\text{lim}}$  n'est pas libre, il est repris de la partie III).

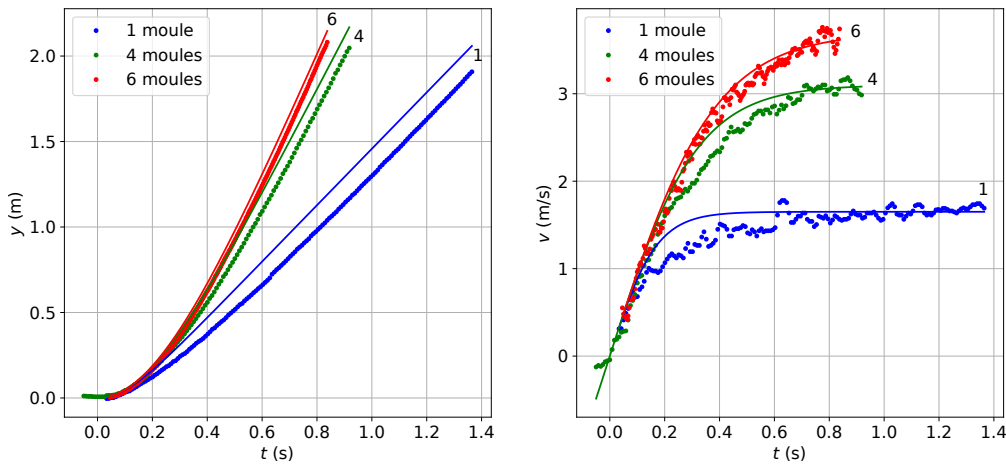


FIGURE 2.4 – Tracé de  $y(t)$  et de  $v(t)$  : expérience (points) et théorie (traits pleins, il s'agit de la relation (13) utilisée avec les valeurs de  $v_{\text{lim}}$  obtenues dans l'étude de la phase stationnaire). La courbe pour 2 moules a été retirée car son démarrage n'est pas à  $v = 0$ . Les courbes de  $v(t)$  sont lissées sur 5 points glissants.

### IV.3 Pourquoi cela ne fonctionne pas : la masse ajoutée

La relation (13) prévoit aux temps courts une vitesse  $v(t) \approx v_{\text{lim}} \frac{t}{v_{\text{lim}}/g} = gt$ , donc une accélération  $g$  (à faible vitesse, les frottements ne se font pas encore sentir). Mais les courbes expérimentales montrent que l'accélération initiale est plus faible que  $g$ . Ceci s'explique par le fait que c'est non seulement le moule qui se met en mouvement, mais aussi une certaine masse d'air autour de lui. Cette masse d'air à mettre en mouvement a sa propre inertie, qui tend à ralentir l'accélération initiale. On en rend compte dans la résultante des actions du fluide sur le moule par un terme supplémentaire<sup>3</sup> [1] :

$$\vec{F} = - \left( m_a \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2} C_D \rho S v^2 \right) \vec{e}_y, \quad (14)$$

avec  $m_a$  la "masse ajoutée", masse d'air équivalente à mettre en mouvement. Ce terme est présent dans un fluide visqueux comme dans un fluide idéal. Il est bien documenté pour certaines géométries simples, comme dans le cas d'une sphère de rayon  $R$ , où  $m_a = 0,5 \times \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$  (où  $\rho$  est la masse volumique du fluide, ici l'air). Il est important dans l'eau, et participe par exemple au ralentissement d'un plongeur qui pénètre dans l'eau. Mais il est usuellement négligeable dans l'air, car sa densité est faible. Cependant dans le cas présent, la masse du moule est très petite et est comparable à celle du volume d'air déplacé.

En suivant [1], on pose le coefficient

$$C_a = \frac{m_a}{\rho R^3}, \quad (15)$$

normalement indépendant de  $R$  et dépendant de la forme uniquement. Par exemple, [1] obtiennent expérimentalement  $C_a = 3,8$  pour leurs moules de rayon  $R = 7,5$  cm, ce qui donne

3. Cette loi de force (14) reste encore une approximation, qui ne capture pas par exemple un sillage tourbillonnaire, ou le fait que l'on voit parfois le moule osciller légèrement (ceci est visible aussi sur les courbes de vitesse).

chez eux  $m_a = 3,8\rho R^3 = 1,9\text{ g}$ , supérieure à la masse individuelle de leur moule ( $m = 0,86\text{ g}$ ). Par simulation numérique dans un fluide parfait, ils obtiennent  $C_a = 3,4$ .

La prise en compte théorique de ce terme supplémentaire est simple, car le PFD appliqué au moule devient :

$$(m + m_a)\frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{2}C\rho S v^2, \text{ soit } (m + m_a)\frac{dv}{dt} = mg\left(1 - \frac{1}{2mg}C\rho S v^2\right). \quad (16)$$

On a toujours  $v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho S}}$  en régime stationnaire : la partie III n'est en rien impactée.

L'équation se réécrit :

$$\frac{dv}{dt} = a_0\left(1 - \frac{v^2}{v_{\text{lim}}^2}\right), \text{ avec } a_0 = \frac{m}{m + m_a}g. \quad (17)$$

L'accélération initiale  $g$  est donc à substituer par l'accélération  $a_0 = \frac{m}{m + m_a}g$ , plus petite.

Via cette substitution, on obtient :

$$v(t) = v_{\text{lim}} \tanh\left(\frac{t}{v_{\text{lim}}/a_0}\right) \text{ et } y(t) = \frac{v_{\text{lim}}^2}{a_0} \ln\left(\cosh\frac{t}{v_{\text{lim}}/a_0}\right). \quad (18)$$

On comprend que plus le nombre de moules est important, plus la masse des moules  $m = N \times m_1$  se rapproche ou dépasse la masse d'air  $m_a$  (indépendante de  $N$ , la forme globale ne changeant quasiment pas par empilement), plus  $a_0$  se rapproche de  $g$ . Ceci explique le meilleur accord précédemment obtenu pour six moules que pour un moule.

#### IV.4 Comparons à nouveau

Revenons à nos données. Un fit par la fonction  $y(t)$  donnée par (18) a été effectué. Il y a maintenant deux paramètres laissés libres :  $a_0$  et  $v_{\text{lim}}$ . On peut ensuite calculer  $m_a = \frac{mg}{a_0} - m$  puis  $C_a = \frac{m_a}{\rho R^3}$ . On obtient :

Nombre de moules	$a_0$ (fit)	$v_{\text{lim}}$ (fit)	$m_a$ (déduit)	$C_a$ (déduit)
1	$6.0\text{ m s}^{-2}$	$1.6\text{ m s}^{-1}$	0,09 g	7,5
4	$8.1\text{ m s}^{-2}$	$3.1\text{ m s}^{-1}$	0,11 g	9,5
6	$8.8\text{ m s}^{-2}$	$3.8\text{ m s}^{-1}$	0,09 g	7,5

Rappelons que la masse d'un moule est  $m_1 = 0,14\text{ g}$ .

Les valeurs de  $v_{\text{lim}}$  sont cohérentes avec celles obtenues précédemment. La diminution de l'accélération initiale est significative. Les valeurs de  $m_a$  et de  $C_a$  devraient être indépendantes du nombre de moules, car les empiler ne change pas la forme globale ni  $R$ . C'est plus ou moins le cas ici. En revanche, nos valeurs de  $C_a$  sont supérieures d'un facteur deux par rapport à celles, plus fiables, de l'article [1]. De plus, un zoom aux temps courts montre que le fit n'est pas très bon, alors même que c'est aux temps courts que  $a_0$  est déterminé : position théorique en  $y(t) \approx a_0 t^2/2$ . Il faudrait poursuivre les investigations.

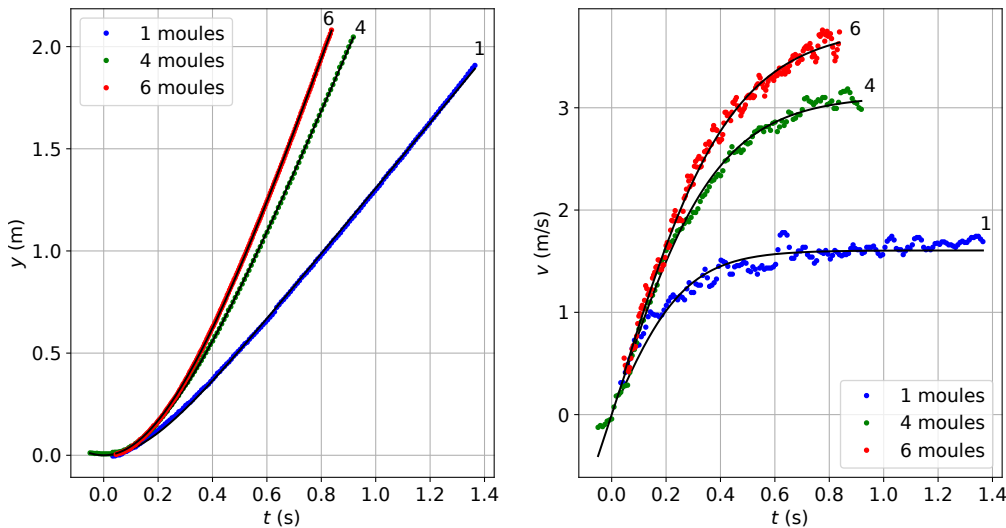


FIGURE 2.5– Tracé de  $y(t)$  et de  $v(t)$  : expérience VS théorie avec masse ajoutée. Pour chaque cas, le fit est réalisé sur la courbe  $y(t)$  via l'expression (18). Les paramètres libres sont  $v_{lim}$  et  $a_0$ . Puis avec ces paramètres, on trace l'expression de  $v(t)$  théorique sur le graphe de droite.

## V Conclusion de cette étude “côté prof”

L'étude de la phase stationnaire est concluante, avec une expression théorique des frottements quadratiques qui décrit bien les expériences et un coefficient de traînée assez robuste. L'étude de la phase transitoire s'avère en revanche moins concluante, la masse ajoutée obtenue étant deux fois plus élevée que dans l'étude [1]. Il faudrait reprendre les enregistrements en soignant la qualité aux temps courts.

## VI Avec les élèves en TP

Une étude de la phase stationnaire constitue un TP de mécanique quantitatif, qui permet l'étude d'une loi de force (ici force de frottements fluides, avec détermination du coefficient de traînée) et l'utilisation d'une caméra pour enregistrer puis analyser un mouvement. Ces points apparaissent dans les programmes de première année.

### VI.1 Exemples de résultats

La figure ci-dessous montre les résultats avec une classe de PTSI, avec les mêmes moules que pour l'étude de la partie III. Chaque binôme devait filmer et exploiter la chute pour 1, 3 et 5 moules.

Les figures 2.6 et 2.7 sont une mise en commun de tous les résultats de la classe en fin de TP. S'en suit une discussion :

- Y a-t-il des valeurs aberrantes? Dans le cas présent, deux valeurs très basses sont retirées (les deux croix figure 2.6). Je n'ai pas eu le temps de comprendre le problème. D'autre part, un groupe a des valeurs systématiquement trop basses (les trois carrés

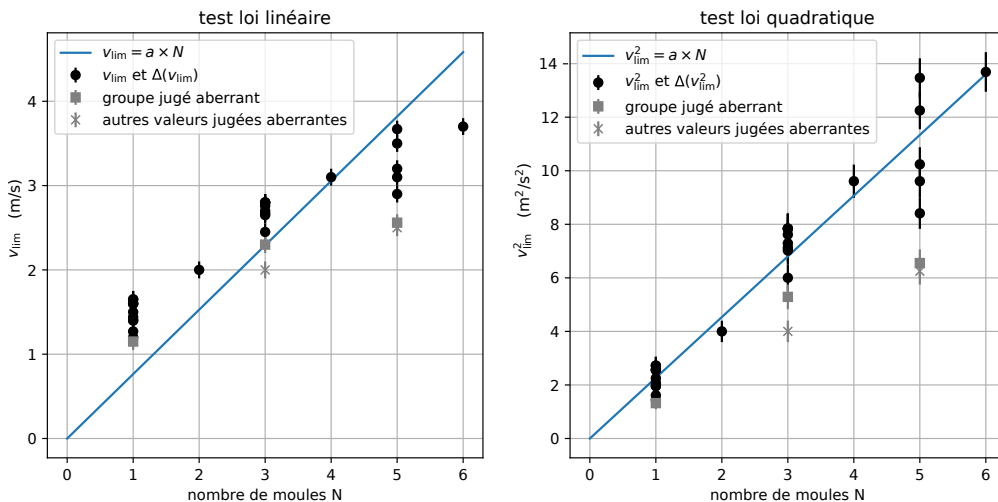


FIGURE 2.6 – Valeurs obtenues par les binômes en TP. Les valeurs pour  $N = 2, 4, 6$  sont celles du professeur.

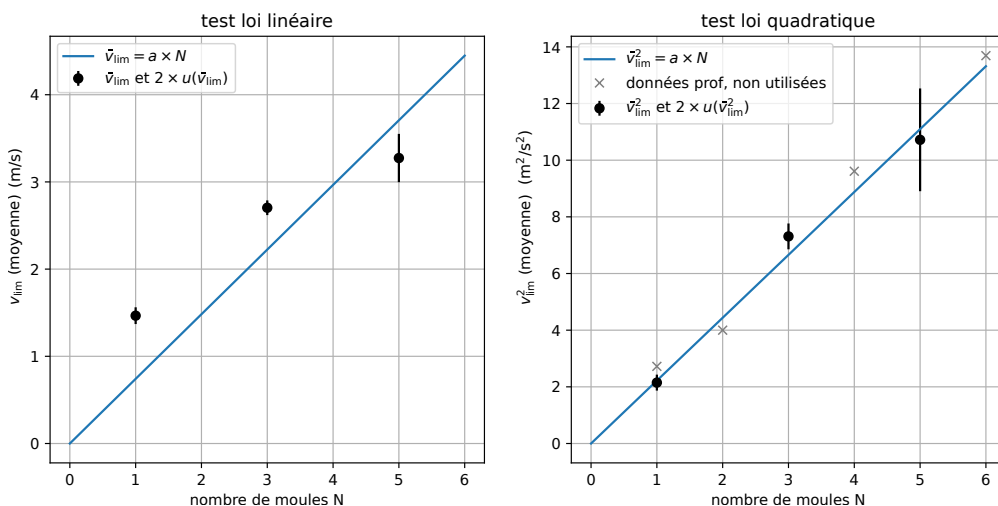


FIGURE 2.7 – Moyenne des valeurs obtenues par les binômes en TP, à nombre de moules fixé. Les valeurs aberrantes ont été exclues. Les incertitudes sont de type A. Les valeurs professeur sont présentées (croix) mais non inclus dans le fit.

sur la figure 2.6). Ce groupe avait des soucis avec la base de temps produite par leur smartphone, que j'ai pu constater pendant la séance (différences anormales entre Tracker et Latis Pro).

- Validation des lois de frottements? La variabilité est grande. Cependant, la loi en  $v_{\text{lim}}$  est rejetée, et celle en  $v_{\text{lim}}^2$  est compatible avec les données, mais les données restent trop dispersées pour être vraiment contraignantes.

À partir de la loi quadratique, le coefficient directeur  $a$  permet d'en déduire le coefficient de traînée  $C = 0,68$ ,  $u(C) = 0,08$ . Il est comparé à celui attendu dans la littérature.

Une représentation alternative des mêmes données, peut-être plus convaincante, est présentée figure 2.7. Il s'agit de calculer, à nombre de moules fixé, la moyenne des résultats individuels. Par exemple, il y a 8 valeurs de  $v_{\text{lim}}$  pour  $N = 3$  moules : on en prend la moyenne, et on en déduit l'incertitude-type sur cette moyenne en calculant l'écart-type expérimental des 8 valeurs divisée par  $\sqrt{8}$ . Cette représentation est moins sensible aux valeurs aberrantes. Les conclusions sont les mêmes. Via la pente  $a$  du cas quadratique, on obtient  $C = 0,64$ ,  $u(C) = 0,08$ .

La figure 2.8 présente les résultats d'une autre classe, avec des moules différents.

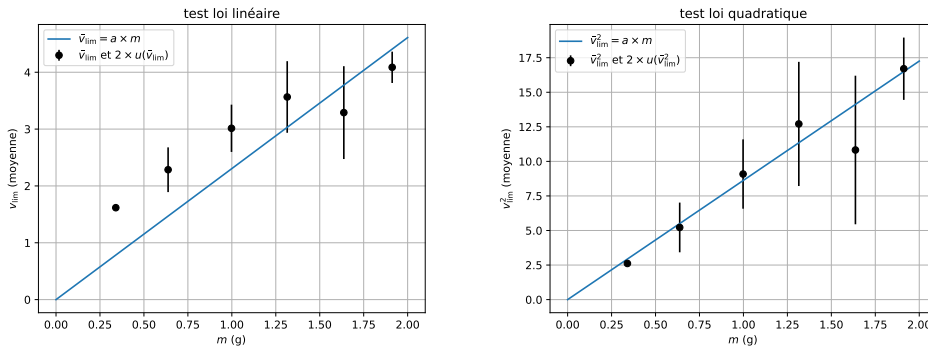


FIGURE 2.8 – Résultats d'une autre classe (classe de MPSI d'un collègue), avec des moules différents des nôtres. Même traitement que pour la figure 2.7 : à nombre de moules fixés, calcul de la moyenne des vitesses  $\bar{v}_{\text{lim}}$ , et de leur écart-type qui, divisé par la racine du nombre de points, donne  $u(\bar{v}_{\text{lim}})$ . Pas d'incertitude sur le premier point car une seule valeur.

## VI.2 Conseils

Quelques conseils non exhaustifs pour un TP réussi avec les élèves :

- C'est un TP assez long. Il faut anticiper les problèmes d'envoi des vidéos sur l'ordinateur (par mail ou par câble USB), de conversion parfois nécessaire pour traiter la vidéo (.avi vers .mpeg ou autre), etc. Une idée est de faire réaliser la chute d'un seul moule par tous, puis une seconde chute avec un nombre de moules réparti entre les groupes : certains font 2 moules, d'autres 3, etc.
- Le mode ralenti des smartphones produit une vidéo pour laquelle la base de temps est mal interprétée par le logiciel de traitement. Il faut voir sur le smartphone de combien

est ralenti la vidéo. Par exemple, pour un ralenti  $\times 4$ , il faudra multiplier par 4 les vitesses obtenues sur le logiciel. Le smartphone indique parfois les ips ou fps (images ou frame par seconde). Le taux normal est de 30 ips, si bien que 120 ips correspond à un ralenti  $\times 4$ .

Il peut toutefois y avoir des surprises, avec un taux normal considéré à 60 ips (120 ips correspond alors à un ralenti  $\times 2$ ), ou des situations inexplicables (exemple : Latis Pro donnait une base de temps 30 % plus rapide que Tracker sur une même vidéo). Une solution est de filmer un chronomètre pour tester.

- Attention aux effets de distorsion de l'objectif du smartphone<sup>4</sup>. Les élèves ont tendance à filmer leur camarade en restant assez proche : à 1 m par exemple, pour une chute sur une hauteur de 2 m. Il y a une certaine distorsion sur les bords de l'image, alors même que la portion utile de la trajectoire est celle dans la partie basse de l'image (vitesse limite atteinte). Il en résulte en général une sous-estimation systématique des vitesses limites. Il faut donc les encourager à reculer, et à s'accroupir pour filmer la partie basse. La partie haute n'est pas utile pour déterminer  $v_{\text{lim}}$ .
- Attention à la longueur à partir de laquelle la phase stationnaire débute. On voit sur nos courbes qu'il faut facilement 1,5 m de chute avant d'atteindre  $v_{\text{lim}}$  (avec nos moules).  
Il est préférable de choisir des moules plutôt gros, afin d'avoir un  $v_{\text{lim}}$  plus petit (pointage facile) et un régime transitoire plus court. Ceci permet d'aller jusqu'à un nombre de moules plus importants tout en conservant une longueur d'accélération raisonnable. Cf discussion à la fin de la partie III.2.
- Comme d'habitude, attention aux erreurs fautives des étudiants : utilisation d'un moule très déformé et donc à la section bien plus importante, calibration en attribuant 1 m à la règle étalon de 60 cm, exploitation de  $v_x$  au lieu de  $v_y$ , mauvaise base de temps attribuée à la vidéo, et autres surprises qui pimentent nos séances.

Enfin, il est possible de donner plusieurs formes à ce TP : le restreindre à des mesures répétées sur un seul moule (en admettant la loi de frottement, ceci permet d'en déduire le coefficient de traînée), ou encore s'approcher d'une démarche d'investigation en produisant un énoncé plus ou moins ouvert.

## VII Annexe : régression $y = ax$ en Python

Dans ce qui suit, on pose :

```
x = nb_moules      # tableau du nombre de moules
y = vlim**2        # vitesse limite au carré
uy = 2*vlim*uvlim # incertitude-type sur les yi
```

Quatre possibilités sont présentées. D'abord avec la fonction `curve_fit`.

4. Cf. par exemple [https://fr.wikipedia.org/wiki/Distorsion\\_\(optique\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Distorsion_(optique)). On peut quantifier l'effet en prenant une photographie avec un objet identique au centre et sur le bas de l'image. Avec mon téléphone, dans des conditions déraisonnables (objectif à 1 m du plan des objets, ceux-ci étant séparés verticalement de 1 m), l'objet en bas apparaît 25 % plus court que celui au centre. Si l'étalonnage est réalisé au centre, alors les longueurs au bord de l'image sont perçues comme trop courtes. Il en résulte une sous-estimation de la vitesse du même pourcentage. Dans des conditions plus raisonnables (à 2 m du plan des objets), les longueurs diffèrent de 4 %, et de 1 % seulement si on ne prend pas un objet à l'extrême bord de l'image.

1. Sans connaissance des  $u(y_i)$  :

```
def ylin(x,a):
    return a*x
popt, pcov = spo.curve_fit(ylin, x, y)
a = popt[0]
ua = np.diag(pcov**0.5)[0]
```

2. Si on souhaite que l'ajustement prenne en compte les  $u(y_i)$  :

```
popt, pcov = spo.curve_fit(ylin,x,y,sigma=uy,absolute_sigma=True)
a = popt[0]
ua = np.diag(pcov**0.5)[0]
```

Les mêmes résultats peuvent être obtenus par des formules directes. Il s'agit en effet de minimiser la fonction  $\chi(a) = \sum_i w_i (y_i - ax_i)^2$ , avec  $w_i = 1$  dans le cas où on ignore les incertitudes sur les  $y_i$ , et  $w_i = 1/u(y_i)^2$  si on les prend en compte. On obtient alors une expression pour  $a$ . Puis celle pour  $u(a)$  est obtenue par les propriétés de la variance (forme quadratique).

3. Sans connaissance des  $u(y_i)$ , on utilise :

```
a = np.sum(x*y) / np.sum(x*x)
uy_estime = np.sqrt( np.sum((y-a*x)**2) / (N-1) )
ua = uy_estime / np.sqrt( np.sum(x*x) )
```

4. Et si l'on connaît les  $u(y_i)$  :

```
w = 1/uy**2
a = np.sum(w*x*y) / np.sum(w*x**2)
ua = 1/np.sqrt(np.sum(w*x**2))
```

1 et 3 sont équivalents, et 2 et 4 sont équivalents. Dans l'article, ce sont les méthodes 2 et 4 qui sont utilisées.

Pour être complet, voici les résultats pour les pentes  $a$  et incertitudes-types  $u(a)$ .

Fit sur toutes les valeurs (figure 2.6, droite)		
méthode	$a$ ( $\text{m}^{-2} \text{s}^2$ )	$u(a)$ ( $\text{m}^{-2} \text{s}^2$ )
1 ou 3 (non prise en compte des $u(y_i)$ )	2,26	0,06
2 ou 4 (prise en compte des $u(y_i)$ )	2,23	0,02
Fit sur les moyennes $\bar{v}_{\text{lim}}$ (figure 2.7, droite)		
méthode	$a$ ( $\text{m}^{-2} \text{s}^2$ )	$u(a)$ ( $\text{m}^{-2} \text{s}^2$ )
1 ou 3 (non prise en compte des $u(y_i)$ )	2,22	0,09
2 ou 4 (prise en compte des $u(y_i)$ )	2,34	0,06

## VIII Références

[1] : “The Added Mass of a Falling Coffee Filter”, C. Boyle & J. Pantaleone, European Journal of Physics, Volume 42, Number 4, avril 2021 (<https://arxiv.org/abs/2206.14902>)