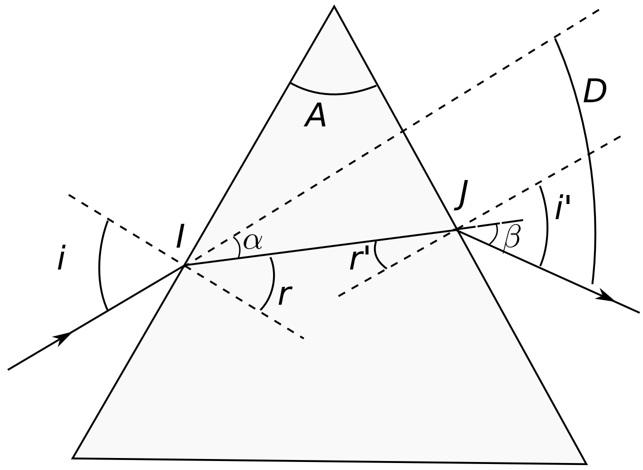
PTSI
Physique-chimie

Exercices supplémentaires
– Corrections –

Optique : Optique géométrique (réfraction)

36.19 Étude du prisme [•••]

36.19 – **Correction**



1 - $\boxed{\sin i = n \sin r \quad et \quad n \sin r' = \sin i'.}$

2 - *Dans le triangle* KIJ : $\pi = A + (\frac{\pi}{2} - r) + (\frac{\pi}{2} - r')$, *d'où* $\boxed{A = r + r'.}$

3 - $D = \alpha + \beta = (i - r) + (i' - r')$, *donc* $\boxed{D = i + i' - A.}$

4 - *Il peut y avoir réflexion totale en* J *(passage d'un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent) : le cas limite est pour* $i' = \pi/2$, *ce qui donne* $n \sin r' = 1$ *et donc* $r' = \arcsin(1/n)$.

Ainsi, il n'y a un rayon émergent si $r' < \arcsin(1/n)$.

Or $r = A - r'$, *donc un rayon émergent si* $r > A - \arcsin(1/n)$.

Or $i = \arcsin(n \sin r)$, *donc rayon émergent si* $\boxed{i > i_{min} = \arcsin(n \sin(A - \arcsin(1/n))).}$

On trouve $i_{min} = 27{,}9°$ *pour* $n = 1{,}5$.

Remarque : *les fonctions* $\sin$ *et* $\arcsin$ *sont croissantes sur* $[-\pi/2, \pi/2]$, *donc elles n'impliquent pas un renversement des inégalités.*

*(**Remarque :** il y a une autre condition, non demandée dans l'énoncé, qui porte sur* A. *En effet, l'angle de réfraction maximal en* I *donne* $r < \arcsin(1/n)$. *Or on a montré qu'aussi,* $r' < \arcsin(1/n)$. *Donc il faut* $A = r + r' > 2\arcsin(1/n)$.*)*

5 - *Supposons être au minimum de déviation (*D *minimal). Imaginons qu'on envoie plutôt un rayon lumineux depuis la sortie, avec le même trajet que le rayon émergent. Dans cette situation, la déviation est aussi minimale (sinon c'est qu'on n'était pas au minimum tout à l'heure). C'est donc que le trajet de la lumière est symétrique, et que* $i = i'$.

6 - ⋆ *Si* $i = i'$, *alors* $\sin r = \dfrac{\sin i}{n} = \dfrac{\sin i'}{n} = \dfrac{n \sin r'}{n} = \sin r'$, *donc* $r = r'$.

Ensuite, on sait que $\sin i = n \sin r$, *donc* $n = \sin i / \sin r$ *et il faut exprimer* i *et* r.

⋆ *On a* $A = r + r' = 2r$, *donc* $r = A/2$.

⋆ *Puis* $D_{min} = i + i' - A = 2i - A$ *donc* $i = \dfrac{D_{min} + A}{2}$.

On a donc bien $\boxed{n = \dfrac{\sin\left(\frac{D_{min}+A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}}.}$

36.20 Travailler avec des angles orientés [●●○]

36.20 – **Correction**

1 - *On raisonne comme q3 de l'exercice sur le prisme. On obtient :*

$$|D| = |\alpha| + |\beta| = (|i| - |r|) + (|i'| - |r'|),$$

et en remplaçant $|D|$ par $-D$, $|i'|$ par $-i'$ et $|r'|$ par $-r'$ (car ils sont négatifs sur le schéma), on a :

$$-D = \alpha + \beta = (i - r) + (-i' - (-r')) = i - i' + r' - r = i - i' - A.$$

36.21 Étude d'une goutte d'eau (angles non orientés) [●●●]

36.21 – **Correction**

1 - $\boxed{D_1 = i_1 - i_2.}$

$D_2 + i_3 + i_2 = \pi$. *Or* $i_2 = i_3$. *Donc* $\boxed{D_2 = \pi - 2i_2.}$.

$\boxed{D_3 = i_4 - i_3.}$

2 - *On voit par symétrie que* $\boxed{i_4 = i_1.}$

$\sin i_1 = n \sin i_2$, *donc* $\boxed{i_2 = \arcsin(\sin i_1/n).}$

$\boxed{i_3 = i_2 = \arcsin(\sin i_1/n).}$

3 - *La déviation totale est :*

$$D = D_1 + D_2 + D_3 = (i_1 - i_2) + (\pi - 2i_2) + (i_4 - i_3) = -4i_2 + 2i_1 + \pi$$

D'où :

$$\boxed{D = -4 \arcsin\left(\frac{\sin i_1}{n}\right) + 2i_1 + \pi.}$$

36.22 Étude d'une goutte d'eau (angles orientés) [●●●]

36.22 – **Correction**

1 - i_4,D_1, D_2, D_3, D *sont négatifs.*

2 - $|D_1| = |i_1| - |i_2|$ *donc* $-D_1 = i_1 - i_2$: $\boxed{D_1 = -i_1 + i_2.}$

$|D_2| + |i_3| + |i_2| = \pi$, *d'où* $-D_2 + 2i_2 = \pi$ $(i_2 = i_3)$. *Donc* $\boxed{D_2 = -\pi + 2i_2.}$.

$|D_3| = |i_4| - |i_3|$ *donc* $-D_3 = -i_4 - i_3$ et $\boxed{D_3 = i_4 + i_3.}$

3 - *On voit par symétrie que* $|i_4| = |i_1|$, *donc* $\boxed{i_4 = -i_1.}$

$\sin i_1 = n \sin i_2$, *donc* $\boxed{i_2 = \arcsin(\sin i_1/n).}$

$\boxed{i_3 = i_2 = \arcsin(\sin i_1/n).}$

4 - *La déviation totale est :* $|D| = |D_1| + |D_2| + |D_3|$*, et comme ils sont tous négatifs ceci devient* $D = D_1 + D_2 + D_3$*. Puis on remplace :*

$$D = (-i_1 + i_2) + (-\pi + 2i_2) + (i_4 + i_3) = 4i_2 - 2i_1 - \pi$$

D'où :

$$\boxed{D = 4\arcsin\left(\frac{\sin i_1}{n}\right) - 2i_1 - \pi.}$$

36.23 Sauvetage à la plage [●●○]

36.23 – **Correction**

1 - *La durée du parcours est* $T = \dfrac{AI}{v_1} + \dfrac{IB}{v_2} = n_1 AI + n_2 IB$*.*

On exprime AI *avec le théorème de Pythagore :* $AI = \sqrt{x^2 + d_1^2}$*.*

De même, $IB = \sqrt{(d-x)^2 + d_2^2}$*. On a donc l'expression demandée.*

2 - $T(x)$ *est vue comme une fonction de* x*, qui est la seule grandeur à varier dans cette expression. On cherche son minimum en annulant la dérivée.*

On exprime d'abord $T'(x) = n_1 \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + d_1^2}} + n_2 \dfrac{-2(d-x)}{2\sqrt{(d-x)^2 + d_2^2}} = n_1 \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + d_1^2}} - n_2 \dfrac{(d-x)}{\sqrt{(d-x)^2 + d_2^2}}$.

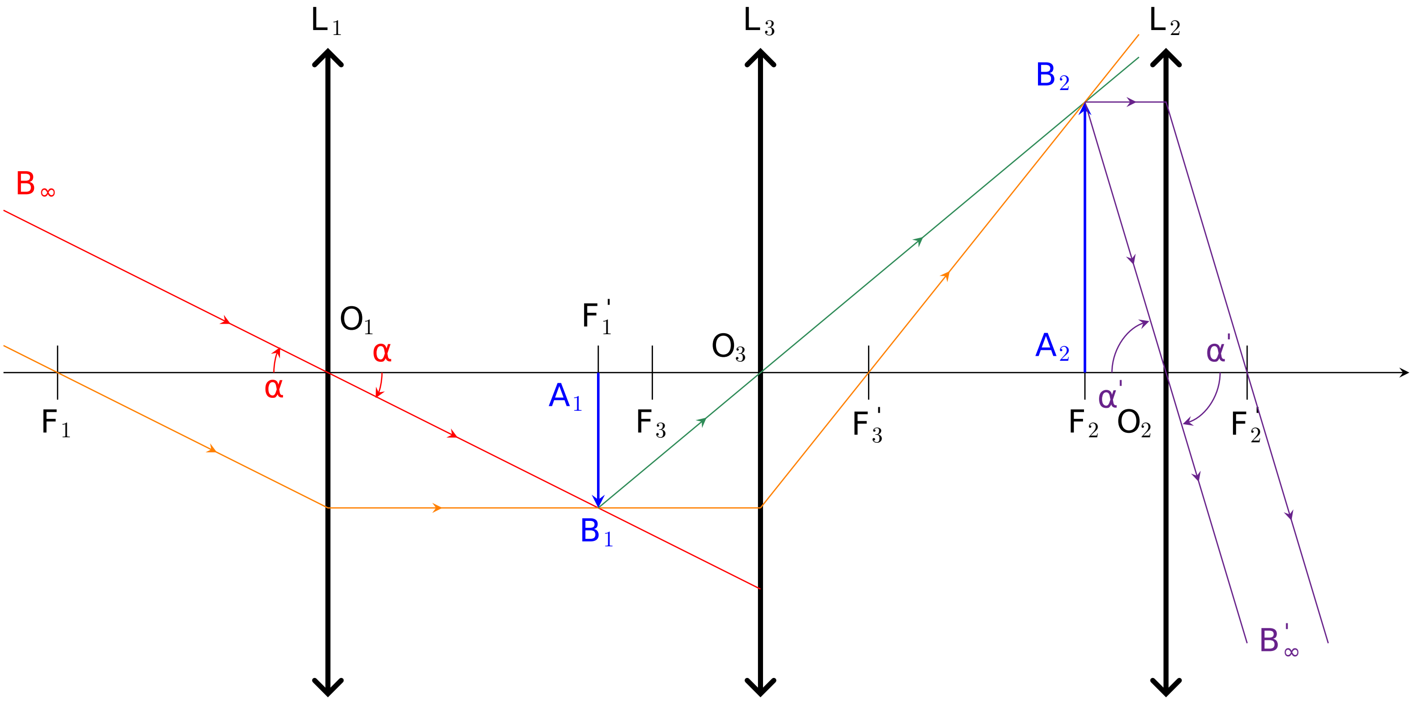
Donc $T'(x) = 0$ *est équivalent à* $n_1 \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + d_1^2}} = n_2 \dfrac{(d-x)}{\sqrt{(d-x)^2 + d_2^2}}$.

Or $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + d_1^2}} = \dfrac{x}{AI} = \sin i_1$*, et* $\dfrac{(d-x)}{\sqrt{(d-x)^2 + d_2^2}} = \dfrac{d-x}{IB} = \sin i_2$*.*

On a donc bien la condition $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$*. Le sauveteur doit suivre la loi de Descartes !*

37.10 Lunette terrestre

37.10 – **Correction**



37.15 ▶ Vidéoprojecteur

[●○○]

37.15 – **Correction**

On connaît $|A'B'| \sim 1\,\mathrm{m}$ *(hauteur de l'écran) et* $|AB| = 24\,\mathrm{mm}$, *donc on connaît le grandissement* $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\dfrac{3000}{24} \simeq -40$.

On connaît aussi $|OA'| \sim 3\,\mathrm{m}$ *(distance entre lentille et écran, tout ceci est approximatif !). Or on a aussi* $\gamma = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$, *d'où on déduit* $|OA| = \left|\dfrac{OA'}{\gamma}\right| \simeq 75\,\mathrm{mm}$ *(ce* OA *correspond à la distance entre le centre de la lentille et l'objet "dalle LCD").*

Enfin, on peut utiliser la relation $\dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{f'}$. *Comme* $|OA'| \gg |OA|$, *on a* $\dfrac{1}{\overline{OA'}} \ll \dfrac{1}{\overline{OA}}$, *si bien que la relation devient* $-\dfrac{1}{\overline{OA}} \simeq \dfrac{1}{f'}$.

On en déduit $f' \simeq -\overline{OA}$, *soit* $\boxed{f' \sim 75\,\mathrm{mm}.}$

37.17 D'autres formules pour le grandissement [●●○]

37.17 –**Correction**

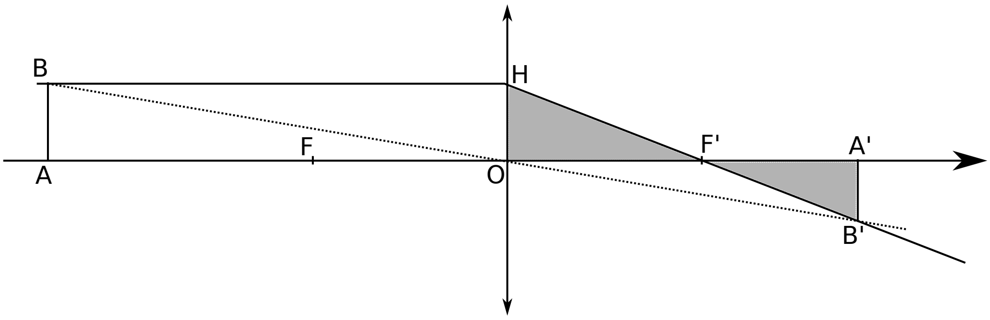
1 - *Dans le triangle "en papillon" grisé ci-dessous, on a*

$$\frac{\overline{B'A'}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{OF'}}$$

(on prend toutes les longueurs dans le sens positif pour ne pas avoir de souci de signe).

Or $\overline{OH} = \overline{AB}$, donc le rapport ci-dessus est bien égal à $-\gamma$ (signe moins car $\overline{B'A'} = -\overline{A'B'}$).

De plus $\overline{OF'} = f'$, donc $\boxed{\gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}.}$



2 - *Même idée, mais dans le triangle grisé ci-dessous.*

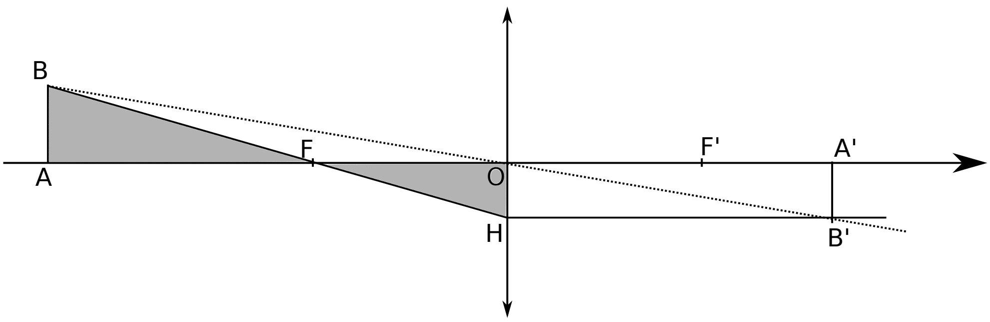
$$\frac{\overline{HO}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{OF}}{\overline{FA}}.$$

Or $\overline{HO} = \overline{B'A'}$, donc

$$\underbrace{\frac{\overline{B'A'}}{\overline{AB}}}_{=-\gamma} = \frac{\overline{OF}}{\overline{FA}}.$$

Or $\overline{OF} = f = -f'$, on a donc

$$\boxed{\gamma = \frac{f'}{\overline{FA}}.}$$



Structure de la matière : molécules

53.15 Ammoniac et moment dipolaire [●●○]

53.14 – **Correction**

1 - *On part de $\vec{\mu} = \vec{\mu_1} + \vec{\mu_2} + \vec{\mu_3}$. On a :*

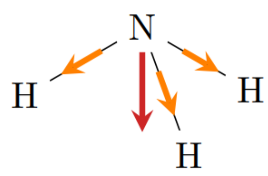
$$\begin{aligned}\mu^2 &= \vec{mu} \cdot \vec{\mu} \\ &= (\vec{\mu_1} + \vec{\mu_2} + \vec{\mu_3}) \cdot (\vec{\mu_1} + \vec{\mu_2} + \vec{\mu_3}) \\ &= \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + 2\vec{\mu_1} \cdot \vec{\mu_2} + 2\vec{\mu_1} \cdot \vec{\mu_3} + 2\vec{\mu_2} \cdot \vec{\mu_3} \\ &= 3\mu_1^2 + 6\mu_1\mu_1 \cos\alpha \\ &= 3\mu_1^2(1 + 2\cos\alpha)\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mu = \mu_1\sqrt{3}\sqrt{1 + 2\cos\alpha} = 1{,}12\mu_1.}$

53.14 L'ammoniac et la phosphine [●○○]

53.14 – **Correction**

1 - *L'ammoniac est une molécule polaire car la somme des vecteurs "moment dipolaire" de chaque liaison n'est pas nulle.*



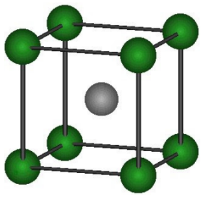
2 - *Il s'agit des liaisons de Van der Waals, attractives, qui agissent entre les molécules de NH_3. Ordre de grandeur : entre 1 et 10 kJ/mol. De plus, il y a présence de liaisons hydrogène, un peu plus fortes.*

3 - *Pas de liaison hydrogène pour PH_3, donc il est plus simple de faire s'évaporer son liquide : sa température d'ébullition est plus basse.*

54.8 Structure cristalline du chlorure d'ammonium [●○○]

54.8 –**Correction**

1 - *Ions Cl^- sur les sommets (en vert) et ions $NH_4{}^+$ au centre (en gris) :*



2 - *La coordinence est le nombre de plus proches voisins. L'ion $NH_4{}^+$ a 8 ions Cl^- autour de lui ? Quant à un ion Cl^-, il a aussi 8 ions $NH_4{}^+$ au plus proche.*

3 - *Dans un cristal ionique, il y a contact entre les ions positifs et négatifs. Ici le contact a lieu le long de la grande diagonale du cube, donc :*

$$a\sqrt{3} = 2R_{\mathrm{NH_4^+}} + 2R_{\mathrm{Cl^-}}.$$

4 - *Il faut que deux ions Cl^- ne se touchent pas. Donc il faut que (raisonnement le long d'une arête du cube) :*

$$a > 2R_{\mathrm{Cl^-}}.$$

On remplace a par son expression établie à la question précédente :

$$\frac{2R_{\mathrm{NH_4^+}} + 2R_{\mathrm{Cl^-}}}{\sqrt{3}} > 2R_{\mathrm{Cl^-}}.$$

D'où :

$$\frac{R_{\mathrm{NH_4^+}}/R_{\mathrm{Cl^-}} + 1}{\sqrt{3}} > 1, \quad \text{d'où} \quad R_{\mathrm{NH_4^+}}/R_{\mathrm{Cl^-}} > \sqrt{3} - 1$$

Électronique : Circuits électriques dans l'ARQS

3.16 Circuit avec deux sources [●○○]

3.16 – **Correction**
Calcul de I_1 :

$$R_1 I_1 + R_3 I_3 = E \quad \text{donc} \quad R_1 I_1 + R_3(I_1 + I_0) = E \quad \text{d'où} \quad I_1 = \frac{E - R_3 I_0}{R_1 + R_3} \tag{1}$$

Calcul de U_0 : $E - R_1 I_1 + R_2 I_0 - U_0 = 0$

$$\text{donc} \quad U_0 = E - R_1 \frac{E - R_3 I_0}{R_1 + R_3} + R_2 I_0 \quad \text{soit} \quad U_0 = \frac{R_3}{R_1 + R_3} E + \left(R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \right) I_0 \tag{2}$$

3.17 Circuit avec deux sources [◐○○]

3.17 – **Correction**
On a directement $I_2 = -I_0$.
Calcul de U_0 :

$$E + U_0 + R_2 I_2 + R_1 I_2 = 0 \quad \text{d'où} \quad U_0 = -E + (R_1 + R_2) I_0 \tag{3}$$

3.20 Équivalence étoile-triangle [●●○]

3.20 – **Correction**

1 - *Schéma de gauche : si $i_1 = 0$, alors on peut retirer la résistance R_1 (aucun courant ne la parcourt), et on a donc entre B et C deux résistances en série, qui sont équivalentes à une résistance $R_2 + R_3$.*

Schéma de droite : si $i_1 = 0$, alors r_2 et r_3 sont parcourus par le même courant, elles sont en série. Et elles se trouvent en parallèle avec r_1. L'ensemble entre B et C est donc équivalent à une résistance $\dfrac{r_1(r_2 + r_3)}{r_1 + r_2 + r_3}$.

Pour avoir équivalence entre les montages il faut donc que $R_2 + R_3 = \dfrac{r_1(r_2 + r_3)}{r_1 + r_2 + r_3}$.

2 - *Il suffit ensuite de faire une permutation circulaire pour avoir les deux autres conditions :*

$$R_3 + R_1 = \frac{r_2(r_3 + r_1)}{r_1 + r_2 + r_3}$$

$$R_1 + R_2 = \frac{r_3(r_1 + r_2)}{r_1 + r_2 + r_3}$$

3 - *On a trois équations et trois inconnues (les R_i). Notations :*

$$\begin{cases} R_2 + R_3 = \dfrac{r_1(r_2+r_3)}{r_1+r_2+r_3} = \alpha_1 \\ R_3 + R_1 = \dfrac{r_2(r_3+r_1)}{r_1+r_2+r_3} = \alpha_2 \\ R_1 + R_2 = \dfrac{r_3(r_1+r_2)}{r_1+r_2+r_3} = \alpha_3 \end{cases}$$

On résout pour trouver par exemple R_1 par substitution : on arrive à $R_1 = \dfrac{\alpha_3+\alpha_2-\alpha_1}{2} = \dfrac{r_2 r_3}{r_1+r_2+r_3}$.

On en déduit les autres par permutation circulaire :

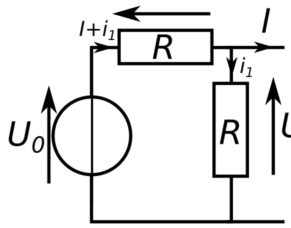
$$\begin{cases} R_1 = \dfrac{r_2 r_3}{r_1+r_2+r_3} \\ R_2 = \dfrac{r_3 r_1}{r_1+r_2+r_3} \\ R_3 = \dfrac{r_1 r_2}{r_1+r_2+r_3}. \end{cases}$$

3.23 Générateur équivalent [●◐○]

3.23 – **Correction**

1 - *On a* $U_0 = R(I+i_1)+U$ *et* $i_1 = U/R$, *donc* $U_0 = R(I+U/R)+U = RI+2U$.

D'où $\boxed{U = \dfrac{U_0}{2} + \dfrac{R}{2}I.}$



2 - *C'est la relation tension-courant pour un générateur de fem* $E = U/2$ *et de résistance interne* $r = R/2$.

3.24 Deux générateurs [●●○]

3.24 – **Correction**

Loi des nœuds : $I_1 + I_2 + I_3 = 0$.

Loi des mailles : $E_1 - R_1 I_1 = E_2 - R_2 I_2 = -R_3\underbrace{(-I_1 - I_2)}_{I_3}$.

Donc on a les deux équations suivantes : $E_1 - R_1 I_1 = E_2 - R_2 I_2$ *et* $E_1 - R_1 I_1 = R_3 I_1 + R_3 I_2$, *pour les deux inconnues* I_1 *et* I_2.

La première donne $I_2 = \dfrac{E_2 - E_1 + R_1 I_1}{R_2}$.

On injecte dans la seconde :

$$E_1 - R_1 I_1 = R_3 I_1 + R_3 \frac{E_2 - E_1 + R_1 I_1}{R_2}$$

$$I_1(-R_1 - R_3 - R_3 R_1/R_2) = -E_1 + (E_2 - E_1)(R_3/R_2)$$

$$I_1(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1) = E_1 R_2 - (E_2 - E_1) R_3$$

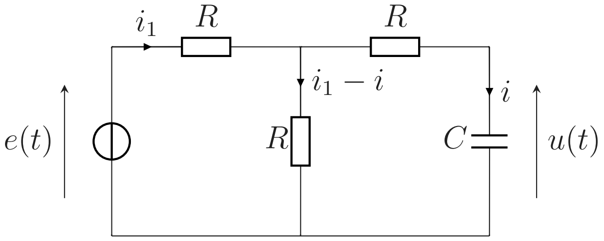
$$\boxed{I_1 = \frac{(R_2+R_3)E_1 - R_3 E_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} = -0{,}99\ \text{A}.}$$

Ensuite, $I_2 = \dfrac{E_2 - E_1 + R_1 I_1}{R_2} = 1{,}51\,A$, *et* $I_3 = -I_2 - I_1 = -0{,}52\,A$.

Systèmes linéaires : Régime transitoire du 1er ordre

4.12 Circuit RC parallèle soumis à un échelon de tension [●●○]

4.12 – **Correction**



1 - *$u(0^+) = u(0^-) = 0$. Ainsi, à 0^+, c'est comme si le condensateur était un fil. On a donc un générateur qui alimente une résistance R en série avec $\{R$ en parallèle avec $R\}$.*

La résistance équivalente de tout ceci est

$$R_{tot} = R + \frac{RR}{R+R} = \frac{3R}{2}.$$

Ainsi le générateur débite $i_1(0^+) = \dfrac{E}{R_{tot}} = \dfrac{2E}{3R}$.

On obtient alors avec un diviseur de courant :

$$i(0^+) = i_1(0^+) \times \frac{R}{R+R} = \frac{E}{3R}.$$

2 - *Régime permanent : le condensateur est comme un interrupteur ouvert, donc $i(+\infty) = 0$.*

3 - *Dans la grande maille : $E = Ri_1 + Ri + u$ (*).*

Dans la petite de gauche : $E = Ri_1 + R(i_1 - i) = 2Ri_1 - Ri$ d'où $Ri_1 = \dfrac{E+Ri}{2}$.

On réinjecte dans (*) : $E = \dfrac{E+Ri}{2} + Ri + u$,

d'où $\dfrac{E}{2} = \dfrac{3}{2}Ri + u$.

Il reste à tout dériver par rapport au temps et à utiliser $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{i}{C}$:

$$0 = \frac{3}{2}R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C}$$

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{2}{3RC}i = 0, \quad \text{on pose} \quad \tau = \frac{3RC}{2}.}$$

4 - *Solutions : $i(t) = Ae^{-t/\tau}$ avec $A = i(0^+) = \dfrac{E}{3R}$.*

Allure classique d'une décharge qui part de $\dfrac{E}{3R}$ et tend vers 0.

Systèmes linéaires : Oscillateurs amortis

6.8 Double circuit RC [●●◐]

6.8 – **Correction**

1 - *C deviennent des interrupteurs ouverts, donc aucun courant dans les résistances : $u = v = E$.*

2 - *Lien entre u et v : $v = Ri_u + u = RC\dot{u} + u$.*

Puis :

$$\begin{aligned}
i &= i_u + i_v \\
\frac{E-v}{R} &= C\frac{du}{dt} + C\frac{dv}{dt} \\
\frac{E-(RC\dot{u}+u)}{R} &= C\frac{du}{dt} + C\frac{dRC\dot{u}+u}{dt} \\
E &= RC\frac{du}{dt} + RC\frac{dRC\dot{u}+u}{dt} + (RC\dot{u}+u) \\
E &= 3RC\frac{du}{dt} + R^2C^2\ddot{u} + u \\
&\boxed{\frac{E}{\tau^2} = \ddot{u} + \frac{3}{\tau}\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau^2}.}
\end{aligned}$$

D'où $\omega_0 = 1/\tau$ et $\omega_0/Q = 3/\tau$ donc $Q = 1/3$.

3 - *$u(t) = Ae^{r_+t} + Be^{r_-t} + E$.*

Avec $r_\pm = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{\tau} \pm \sqrt{\frac{9}{\tau^2} - \frac{4}{\tau^2}}\right) = -\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2\tau}$.

Conditions initiales : $u(0^+) = u(0^-) = 0$ et idem pour v.

Et $v = RC\dot{u} + u$ (cf question 2) ce qui à $t = 0^+$ donne $\dot{u}(0^+) = 0$.

Or $u(0) = A + B + E$ et $\dot{u}(0) = Ar^+ + Br_-$.

Et il n'y a plus qu'à résoudre...

4 - *Allure du type régime apériodique : strictement croissant, par de 0 avec une dérivée nulle, tend vers E.*

5 - *À la fin, $u = v = E$ donc les condensateurs stockent $\mathcal{E}_f = 2 \times \frac{1}{2}CE^2 = CE^2$.*

Le générateur fournit

$$\mathcal{E}_{\text{géné}} = \int_0^{+\infty} Eidt = \int_0^{+\infty} EC(\dot{u}+\dot{v})dt = EC \times [u+v]_0^{+\infty} = 2CE^2.$$

Le rendement est donc de 0,5.

Systèmes linéaires : Régime sinusoïdal forcé

7.13 Détermination d'une inductance [●●○]

7.14 – **Correction**

1 - $\underline{Z} = R + r + jL\omega + \dfrac{\frac{1}{jC\omega} R}{\frac{1}{jC\omega} + R} = R + r + jL\omega + \dfrac{R}{1 + jRC\omega}.$

2 - *Sur la voie X, il s'agit de la tension u_Z aux bornes de $\underline{Z}$.*

Sur la voie Y, il s'agit de $u_R = Ri$, donc d'un signal proportionnel au courant i_z qui traverse $\underline{Z}$.

Or $\underline{u}_Z = \underline{Z}\underline{i}_Z$, donc ces deux signaux sont en phase si et seulement si $\underline{Z}$ est réelle. Donc si sa partie imaginaire est nulle.

Or $\underline{Z} = R + r + jL\omega + \dfrac{R}{1 + jRC\omega} = R + r + jL\omega + \dfrac{R(1 - jRC\omega)}{1 + (RC\omega)^2}.$

Donc $\mathrm{Im}(\underline{Z}) = L\omega - \dfrac{R^2 C\omega}{1 + (RC\omega)^2}.$

On a donc $\boxed{L = \dfrac{R^2 C}{1 + (RC\omega)^2}.}$

Avec $\omega = 2\pi f$ et les valeurs de l'énoncé, on obtient $L = 44\,\mathrm{mH}$.

7.14 Étude d'un circuit en RSF [●●○]

7.14 – **Correction**

1 - $\underline{Z} = \dfrac{\underline{Z_1}\,\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}} = \dfrac{(jL\omega + R)\left(\frac{1}{jC\omega} + R\right)}{2R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega}.$

2 - On a $\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$ et $\underline{u} = \underline{Z_1}\,\underline{i_1}$, donc $\underline{i_1} = \dfrac{\underline{u}}{\underline{Z_1}} = \dfrac{\underline{Z}\,\underline{i}}{\underline{Z_1}}$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{i_1} = \frac{\underline{Z}\,\underline{i}}{R + jL\omega}.}$$

De même, $\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$ et $\underline{u} = \underline{Z_2}\,\underline{i_2}$, donc $\underline{i_2} = \dfrac{\underline{u}}{\underline{Z_2}} = \dfrac{\underline{Z}\,\underline{i}}{\underline{Z_2}}.$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{i_2} = \frac{\underline{Z}\,\underline{i}}{R + \frac{1}{jC\omega}}.}$$

Remarque : avec un diviseur de courant, on a : $\underline{i_1}(t) = \underline{i}(t) \times \dfrac{\frac{1}{jC\omega} + R}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}$ et $\underline{i_1}(t) = \underline{i}(t) \times \dfrac{jL\omega + R}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}.$

3 - $\star$ *Si* $\underline{I_1}/\underline{I_2} = j\alpha$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$, *alors* $\arg(\underline{I_1}/\underline{I_2}) = \pm\pi/2$.

Or $\arg(\underline{I_1}/\underline{I_2}) = \varphi_1 - \varphi_2$ *est justement le déphasage de* i_1 *par rapport à* i_2, *d'où le résultat.*

$\star$ *En utilisant q2 :* $\dfrac{\underline{I_1}}{\underline{I_2}} = \dfrac{\underline{i_1}}{\underline{i_2}} = \dfrac{\frac{1}{jC\omega} + R}{jL\omega + R} = \dfrac{(-jL\omega + R)\left(\frac{1}{jC\omega} + R\right)}{(jL\omega + R)(-jL\omega + R)} = \dfrac{R^2 - \frac{L}{C} - jR\left(L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)}{(L\omega)^2 + R^2}$.

C'est un imaginaire pur lorsque $\boxed{R^2 = \dfrac{L}{C}.}$

Remarque : $\dfrac{\underline{i_1}}{\underline{i_2}} = \dfrac{\underline{I_1}e^{j\omega t}}{\underline{I_2}e^{j\omega t}} = \dfrac{\underline{I_1}}{\underline{I_2}}$.

4 - *Cette fois, ce sont les modules qui doivent être égaux :* $|\underline{I_1}| = |\underline{I_2}|$.

Avec q2, ceci s'écrit aussi $\dfrac{1}{(C\omega)^2} + R^2 = (L\omega)^2 + R^2$, *soit donc* $\dfrac{1}{C\omega} = L\omega$, *soit donc* $\boxed{\omega^2 = \dfrac{1}{LC}.}$

Systèmes linéaires : Filtrages

8.12 Étude d'un bloc filtre [●○○]

8.12 – **Correction**

1 -

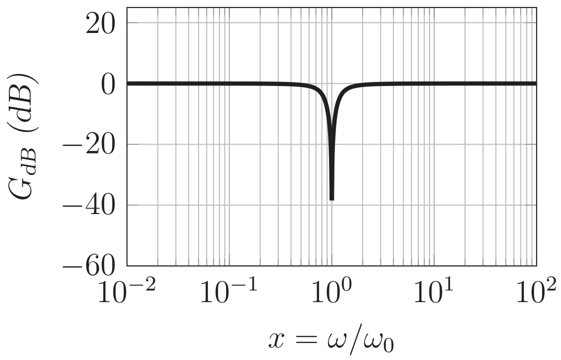
2 - **a.** • $\boxed{\underline{H} \underset{\omega\to 0}{\sim} 1.}$ • $\boxed{\underline{H}(j\omega_0) = 0.}$ • $\underline{H} \underset{\omega\to+\infty}{\sim} \dfrac{-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}{-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$, soit $\boxed{\underline{H} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1.}$

b. *On rappelle que $G_{\text{dB}} = 20\log|\underline{H}|$ (ne pas oublier le module). On reprend donc les expressions précédentes de $\underline{H}$.*

- $\boxed{G_{\text{dB}} \underset{\omega\to 0}{\sim} 0}$ *(car $\log(1) = 0$).*
- $\boxed{G_{\text{dB}} \underset{\omega\to \omega_0}{\to} -\infty}$ *(car $\log(x) \to -\infty$ pour $x \to 0$).*
- $\boxed{G_{\text{dB}} \underset{\omega\to +\infty}{\sim} 0}$ *(car $\log(1) = 0$).*

c.

Ci-contre le diagramme de Bode en gain tracé pour une valeur $Q = 2$. Ce tracé numérique ne le montre pas, mais la courbe doit bien tendre vers moins l'infini en $\omega = \omega_0$.
Il s'agit d'un filtre coupe-bande, car il laisse passer les basses et hautes fréquences, mais coupe autour d'une pulsation ω_0.



3 - ⋆ *Le condensateur et la bobine sont en parallèles et sont équivalents à une impédance $\underline{Z}_{\text{éq}}$ donnée par*

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{éq}}} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{1/(jC\omega)} = \frac{1 + jC\omega\, jL\omega}{jL\omega},$$

d'où $\underline{Z}_{\text{éq}} = \dfrac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$.

⋆ *On applique ensuite un diviseur de tension :* $\underline{u_2} = \underline{u_1} \times \dfrac{R}{R + \underline{Z}_{\text{éq}}}$.

⋆ *Puis il reste à réaliser les calculs :*

$$\begin{aligned}
\underline{u_2} &= \underline{u_1} \times \frac{R}{R + \dfrac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}} \\
&= \underline{u_1} \times \frac{R(1 - LC\omega^2)}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega} \\
&= \underline{u_1} \times \frac{1 - LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + j\dfrac{L}{R}\omega}
\end{aligned}$$

$\star$ *On identifie ceci avec la forme de l'énoncé* $\underline{H} = \dfrac{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 + \dfrac{1}{Q\omega_0} j\omega - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$.

On a donc $\dfrac{1}{\omega_0^2} = LC$, *d'où* $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}.}$ *Et* $\dfrac{1}{Q\omega_0} = \dfrac{L}{R}$, *soit* $\boxed{Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}.}$

Remarque : *Pour le circuit RLC série on a* $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$. *Ici c'est l'inverse. Cela reste homogène car* Q *est sans dimension, donc l'inverse de cette expression l'est également.*

8.15 Filtre en cascade [●●◐]

8.15 – **Correction**

1 - $\underline{H}_1 = \dfrac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} = \dfrac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$ et $\underline{H}_2 = \dfrac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$.

2 - $\underline{H}_2 \times \underline{H}_1 = \dfrac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} \times \dfrac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} = \dfrac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \times \dfrac{1}{1 + jRC\omega} = \dfrac{j\omega/\omega_0}{1 - \omega^2/\omega_0^2 + 2j\,\omega/\omega_0}$ avec $\omega_0 = 1/(RC)$ *et un facteur de qualité* $Q = 1/2$.

3 - *Attention, le diviseur de tension entre* $\underline{s_1}$ *et* $\underline{e_1}$ *ne s'applique plus, car le premier* R *et le premier* C *ne sont pas en série.*

Il faut donc d'abord regrouper les trois composants de droite, d'impédance équivalente

$$\underline{Z_1} = \frac{\frac{1}{jC\omega}\left(\frac{1}{jC\omega} + R\right)}{\frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{jC\omega} + R} = \frac{\frac{1}{jC\omega} + R}{2 + jRC\omega}.$$

On a alors, en raisonnant sur le schéma équivalent : $\underline{s_1} = \underline{e_1}\dfrac{\underline{Z_1}}{R + \underline{Z_1}}$.

Puis en revenant au schéma de départ : $\underline{s_2} = \underline{s_1}\dfrac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \underline{e_1}\dfrac{\underline{Z_1}}{R + \underline{Z_1}}\dfrac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}}$.

Les calculs sont ensuite un peu longs. On arrive finalement à la forme de l'énoncé, avec $\omega_0 = 1/(RC)$ *et* $Q = 1/3$.

4 - *Non !*