Correction – Physique-chimie – DS 6

I Mise en orbite d'un satellite

D'après concours ATS 2014.

1 - $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r}$ et $\boxed{\vec{v}_M = \dfrac{\mathrm{d}r\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta.}$

2 - $\boxed{\vec{F} = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}\vec{u}_r = -\dfrac{g_0 m R_T^2}{r^2}\,\vec{u}_r.}$ Force attractive.

Remarque : le numérateur s'écrit habituellement $G\,m\,M_T$ à la place de $g_0 m R_T^2$.

3 - ⋆ $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}_M = r\vec{u}_r \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta)$ d'où $\boxed{\vec{L}_O = mr^2\dot{\theta}\,\vec{k}.}$

Il s'agit du moment cinétique en O.

⋆ Norme $\boxed{L_O = mr^2|\dot{\theta}|.}$

⋆ Théorème du moment cinétique : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ car $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$ colinéaires.

Donc $\vec{L}_O$ est constant.

4 - Circulaire donc $r =$cst donc $\dot{r} = 0$. On a donc $\boxed{\vec{v}_M = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = v\,\vec{u}_\theta.}$

On dérive pour avoir $\vec{a}_M = \dot{v}\vec{u}_\theta - v\dot{\theta}\vec{u}_r$.

On remplace $\dot{\theta}$ par v/r et donc : $\boxed{\vec{a}_M = \dot{v}\vec{u}_\theta - \dfrac{v^2}{r}\vec{u}_r.}$

5 - PFD au satellite : $m\vec{a}_M = \vec{F}$.

Sur $\vec{u}_\theta$ on a : $\dot{v} = 0$, donc $\boxed{v = \text{cst}}$ et le mouvement est uniforme.

Sur $\vec{u}_r$ on a : $-m\dfrac{v^2}{r} = -\dfrac{g_0 m R_T^2}{r^2}$, d'où $\boxed{v^2 = \dfrac{g_0 R_T^2}{r}.}$

6 - D'où $\boxed{E_c = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{mg_0R_T^2}{2r}}$ et $E_m = E_c + E_p = \dfrac{mg_0R_T^2}{2r} - \dfrac{mg_0R_T^2}{r}$, donc $\boxed{E_m = -\dfrac{mg_0R_T^2}{2r}.}$

7 - AN : $E_m = -\dfrac{4\times 10^3 \times 10 \times (6{,}4\times 10^6)^2}{2\times 8\times 10^6} = -1\times 10^{11}$ J

et $E_m = -\dfrac{4\times 10^3 \times 10 \times (6{,}4\times 10^6)^2}{2\times 40\times 10^6} = -2\times 10^{10}$ J.

Négatif car mouvement borné (on dit aussi mouvement lié).

8 - $E_m = \text{cst}$ car toutes les forces sont conservatives (la seule force prise en compte est celle de gravitation, et il existe une énergie potentielle associée).

$E_m = \dfrac{1}{2}mv^2 + E_p = \dfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \dfrac{mg_0R_T^2}{r}$.

Et on utilise $|\dot{\theta}| = \dfrac{L_0}{mr^2}$ pour avoir $E_m = \dfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dfrac{L_0^2}{m^2r^4}\right) - \dfrac{mg_0R_T^2}{r}$.

D'où $\boxed{E_m = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{L_0^2}{mr^2} - \dfrac{mg_0R_T^2}{r}.}$

9 - On a $E_m = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}$, donc comme $\dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$, il vient que $\boxed{E_m \geq E_{p,\text{eff}}.}$

10 - Les r accessibles pour E_{m1} (avec la condition de la question précédente) ne sont pas bornés : il s'agit d'une trajectoire ouverte, hyperbolique.

Les r accessibles pour E_{m2} sont bornés, il s'agit d'une trajectoire bornée, elliptique.

La trajectoire circulaire est à $r = \text{cst}$, donc pour $E_m = E_{\text{min}}$.

11 - En ces deux points, on a $\boxed{\dot{r} = 0.}$.

D'autre part, $\boxed{r_h + r_b = 2a.}$

12 - En ces deux points, on a $\dot{r} = 0$ et donc : $E_m = \underbrace{\dfrac{1}{2}m\dot{r}^2}_{=0} + \dfrac{1}{2}\dfrac{L_0^2}{mr^2} - \dfrac{mg_0R_T^2}{r}$.

On multiplie par r^2 : $r^2E_m = \dfrac{L_0^2}{2m} - (mg_0R_T^2)\,r$, soit :

$$\boxed{r^2 + \underbrace{\frac{mg_0R_T^2}{E_m}}_{=\alpha}\,r - \underbrace{\frac{L_0^2}{2mE_m}}_{=\beta} = 0.}$$

13 - Racines $r_b = \dfrac{-\alpha - \sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_h = \dfrac{-\alpha + \sqrt{\Delta}}{2}$. La somme est :

$$r_b + r_h = -\alpha, \quad \text{soit} \quad 2a = -\frac{mg_0R_T^2}{E_m}, \quad \text{soit} \quad \boxed{E_{m,t} = -\frac{mg_0R_T^2}{2a}.}$$

14 - On a $E_m = E_{p,\text{eff}}$ en $r = r_b = 8000\,\text{km}$ et en $r = r_h = 40\,000\,\text{km}$. On voit donc que $\boxed{E_m \approx -30\,\text{GJ}.}$

15 - Orbite basse : $r = r_b$ et donc $E_{m,b} = -100\,\text{GJ}$. Orbite haute : $r = r_h$ et donc $E_{m,h} = -20\,\text{GJ}$.

16 - $\boxed{\Delta E_{mP} = E_{m,t} - E_{m,b} = -30 - (-100) = 70\,\text{GJ}.}$

Il faut une masse de carburant $\boxed{m_c = \dfrac{70 \times 10^9}{50 \times 10^6} = 1{,}4 \times 10^3\,\text{kg}.}$

17 - Carburants : ergols liquides, cf https://fr.wikipedia.org/wiki/Moteur-fus%C3%A9e#Moteur_%C3%A0_ergols_liquides

Orbite géostationnaire : orbite telle que le satellite est toujours à la verticale du même point sur Terre. C'est une orbite dans le plan de l'équateur, à une altitude de 36 000 km.

II Mesure de la pesanteur terrestre

Extrait et adapté de CCP TSI 2010.

II.1 Questions introductives

1. a - L'unité de J_{Oz} est le $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$.

b - Le moment d'inertie est d'autant plus grand que la masse du solide est élevée et qu'elle est répartie loin de l'axe considéré.

Ici on a donc $J_{Oz,2} < J_{Oz,1} = J_{Oz,3} < J_{Oz,4}$.

2. Pour un solide en rotation autour d'un axe Oz fixe à la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$, dans un référentiel galiléen, et soumis à des forces $\vec{F_i}$, on a :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \sum_i M_{Oz}(\vec{F_i}),}$$

avec $M_{Oz}(\vec{F_i})$ le moment de la force $\vec{F_i}$ selon l'axe Oz. On peut aussi écrire $\sigma Oz = J_{Oz}\dot{\theta}$.

II.2 Utilisation d'un pendule sans ressort de rappel

3. La trajectoire d'un point quelconque de ce pendule est un arc de cercle dont le centre est sur l'axe Oz, et la distance au centre est $R = OM$ constante.

On a donc $\boxed{v = R\dot{\theta} = OM\dot{\theta}.}$

4. a - ⋆ Système : solide.

⋆ Référentiel : terrestre supposé galiléen.

⋆ Bilan des actions :

- Action de la liaison pivot, de moment nul car on néglige tout frottement.
- Action du poids, de résultante $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_x$ au point G.
  Le bras de levier de cette force est $a\sin\theta$. Tel que sur le dessin de l'énoncé où on a bien $\theta > 0$, $\vec{P}$ tend à faire tourner le solide dans le sens qui est contraire à celui de Oz d'après la règle du tire-bouchon (ou de la main droite), donc dans ce cas là le moment est négatif. (voir ci-dessous pour un autre calcul)
  On a donc $M_{Oz}(\vec{P}) = -a\sin\theta \times mg = -mga\sin\theta$.

* ⋆ Le moment cinétique s'exprime comme $\sigma_{Oz} = J\dot{\theta}$.
* ⋆ D'après le théorème du moment cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = M_{Oz}(\vec{P}), \qquad \text{d'où} \quad \boxed{J\ddot{\theta} = -mga\sin\theta.} \tag{1}$$

Remarque : On peut aussi calculer le moment de $\vec{P}$ de façon plus mathématique :

$$\begin{aligned} M_{Oz}(\vec{P}) &= [\overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}] \cdot \vec{e}_z \\ &= [(a\cos\theta\vec{e}_x + a\sin\theta\vec{e}_y) \wedge mg\vec{e}_x] \cdot \vec{e}_z \\ &= mga[\sin\theta\,\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x] \cdot \vec{e}_z \\ &= mga[\sin\theta\,(-\vec{e}_z)] \cdot \vec{e}_z \\ &= -mga\sin\theta. \end{aligned}$$

b - Pour $\theta \ll 1$, on a $\sin\theta \sim \theta$, l'équation précédente devient donc $J\ddot{\theta} = -mga\theta$, soit sous forme canonique :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{mga}{J}\,\theta.}$$

Équation d'un oscillateur harmonique, de pulsation $\omega^2 = \dfrac{mga}{J}$, et de période :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}.}$$

5. a - On a

$$\begin{aligned} T' = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg'a}} &= 2\pi\sqrt{\frac{J}{m(g+\Delta g)a}} \\ = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg(1+\frac{\Delta g}{g})a}} &= 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}\left(1+\frac{\Delta g}{g}\right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

On a bien à droite quelque chose de la forme $(1+\varepsilon)^\alpha$ (avec $\alpha = -1/2$ et $\varepsilon = \Delta g/g$) qui est équivalent à $1 + \alpha\varepsilon$ pour ε petit.

Donc $T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mga}}\left(1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta g}{g}\right)$.

On reconnaît $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mga}}$ dans cette expression, d'où : $\boxed{T' = T\left(1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta g}{g}\right).}$

b - La sensibilité est $s = \dfrac{\Delta T}{T} = \dfrac{T' - T}{T} = \dfrac{T\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}\right) - T}{T}$,

$$\text{d'où} \quad \boxed{s = -\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}.}$$

II.3 Utilisation d'un pendule avec ressort spiral de rappel

6. L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit, à une constante près choisie nulle : $E_{\text{p,pes}} = mgx_G$ avec x_G l'altitude du centre de masse du solide (l'axe Ox est bien vers le haut, d'où un signe $+$).

On a ici $x_G = a\cos\theta$, d'où $\boxed{E_{\text{p,pes}} = mga\cos\theta}$.

7. a - L'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe Oz fixe est $E_c = \dfrac{1}{2}J\dot{\theta}^2$, avec J le moment d'inertie autour de l'axe Oz.

On a donc ici

$$\boxed{E_m = E_c + E_{\text{p,pes}} + E_{\text{p,ressort}} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mga\cos\theta + \frac{1}{2}K\theta^2.}$$

b - Les forces qui s'exercent sur le pendule sont le poids et l'action du ressort, qui sont conservatives, et l'action de liaison en O, qui est supposée parfaite et donc ne travaille pas. En conséquence, l'énergie mécanique se conserve : $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$.

On a donc, en dérivant l'équation précédente par rapport au temps :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}J\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}^2 + mga\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\theta + \frac{1}{2}K\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta^2 \\ &= \frac{1}{2}J\,2\ddot{\theta}\dot{\theta} - mga\dot{\theta}\sin\theta + \frac{1}{2}K\,2\dot{\theta}\theta, \end{aligned}$$

$$\text{soit : } \boxed{\ddot{\theta} - \frac{mga}{J}\sin\theta + \frac{K}{J}\theta = 0.}$$

Étude de la position d'équilibre en $\theta = 0$

8. a - On a $E_p(\theta) = mga\cos\theta + \dfrac{1}{2}K\theta^2$.

On dérive par rapport à θ : $E_p'(\theta) = -mga\sin\theta + K\theta$.

On a $\boxed{E_p'(0) = 0,}$ donc $\theta = 0$ est une position d'équilibre.

b - La stabilité est donnée par le signe de $E_p''(\theta)$ (attention c'est encore par rapport à θ qu'on dérive). On a $E_p''(\theta) = -mga\cos\theta + K$ et donc $E_p''(0) = -mga + K$.
Ainsi, la position d'équilibre en 0 est stable ssi $E_p''(0) > 0$, ssi $-mga + K > 0$, ssi $\boxed{K > mga.}$

9. Pour θ petit, on a $\sin\theta \sim \theta$, et l'équation du mouvement devient donc

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{K - mga}{J}\right)\theta = 0.$$

On reconnaît l'équation de l'oscillateur harmonique, de pulsation $\omega^2 = \dfrac{K - mga}{J}$, d'où $T = 2\pi/\omega$, soit

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{K - mga}}.}$$

10. a -

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T'^2} &= \frac{1}{T^2} - \frac{1}{(T+\Delta T)^2} \\
&= \frac{1}{T^2} - \frac{1}{T^2}\frac{1}{\left(1 + \dfrac{\Delta T}{T}\right)^2} \\
&= \frac{1}{T^2} - \frac{1}{T^2}\left(1 - 2\frac{\Delta T}{T}\right) \quad \text{(développement limité car } \Delta T \ll T\text{)} \\
&= \boxed{2\frac{\Delta T}{T^3}}
\end{aligned}$$

b - On a $\dfrac{1}{T^2} = \dfrac{1}{4\pi^2}\dfrac{K - mag}{J}$, et donc $\dfrac{1}{T'^2} = \dfrac{1}{4\pi^2}\dfrac{K - mag - ma\Delta g}{J}$.

$$\text{Donc : } \boxed{\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T'^2} = \frac{ma\Delta g}{4\pi^2 J}.}$$

c - On combine les résultats des deux questions précédentes :

$$2\frac{\Delta T}{T^3} = \frac{ma\Delta g}{4\pi^2 J},$$

et on isole $\Delta T/T$ pour obtenir la sensibilité :

$$s_1 = \frac{\Delta T}{T} = \frac{T^2}{2}\frac{ma\Delta g}{4\pi^2 J},$$

$$\text{soit } \boxed{s_1 = \frac{ma\Delta g}{2(K - mga)}.}$$

11. On veut que $|s_1| > |s|$, soit $\dfrac{ma|\Delta g|}{2(K - mga)} > \dfrac{|\Delta g|}{2g}$,

ce qui est possible si $K - mga > gma$,

$$\text{donc si } \boxed{K < 2mga.}$$

En fait, on peut avoir une sensibilité aussi grande que voulue : il suffit de prendre K juste supérieur à mga, par exemple $K = mga + \delta$ avec $\delta > 0$ mais petit, et alors $|s_1| = \dfrac{ma|\Delta g|}{2\delta}$ peut être très grand. Ceci correspond à une période T très grande.

Étude des autres positions d'équilibre

12. Plusieurs possibilités. Par exemple :

```
x = np.linspace(0.1,pi,100)

plt.figure(1)
plt.plot(x,f(x))
plt.grid()
plt.show()
```

13. f est continue, et s'annule une seule fois sur l'intervalle de recherche (et passe de positive à négative en s'annulant).

14.

```
epsilon = 1e-6
a = 0.1
b = pi

while b-a > epsilon:   # à compléter
    m = (a+b)/2
    if f(a)*f(m)<0:    # à compléter
        a=a       # à compléter
        b=m       # à compléter
    else:
        a=m       # à compléter
        b=b       # à compléter

print(m)
```