- **Calculatrices interdites,** comme lors de l'épreuve du concours PT. Faire les applications numériques avec un (ou deux si c'est simple) chiffre significatif est suffisant.
- Toute A.N. sans **unité** ne comptera aucun point, et dégradera l'humeur du correcteur.
- Vérifiez l'**homogénéité** de vos relations.
- Encadrez vos résultats et soignez votre copie.

I Mise en orbite d'un satellite

Cette partie s'intéresse à la mise en orbite d'un satellite.

1 Étude du mouvement du satellite

On étudie dans cette partie le mouvement du satellite, assimilé à un point matériel M, autour de la Terre de rayon $\mathrm{R_T} = 6{,}4.10^3$ km et de centre O.

L'étude est réalisée dans le référentiel géocentrique $\mathscr{R}_g(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ supposé galiléen au cours du temps noté t. L'ensemble des grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base cylindro-polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{k})$. On suppose que la trajectoire du satellite de masse $m = 4{,}0.10^3$ kg est plane et se fait dans le plan $(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ représenté sur la figure 2.

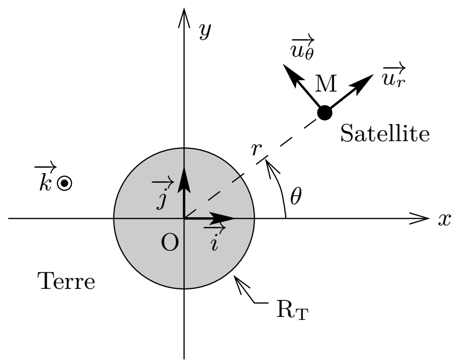


Figure 2

On rappelle que $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_r}$ où $\dot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.

1.1 Préliminaires

1) La position du satellite est repérée par le point M de coordonnées $(r(t), \theta(t), z = 0)$. Déterminer l'expression du vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_\mathrm{M}}$ dans la base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{k})$ en fonction de r, θ et de leurs dérivées éventuelles.

2) On note $g_0 = 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$ la norme de l'accélération de pesanteur à la surface de la Terre. L'énergie potentielle $\mathcal{E}_\mathrm{p}(r)$ associée à l'interaction gravitationnelle $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ s'exprime sous la forme $\mathcal{E}_\mathrm{p}(r) = -g_0 m \dfrac{\mathrm{R_T^2}}{r}$. En déduire l'expression de l'interaction $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ exercée par la Terre sur le satellite en fonction de g_0, m, $\mathrm{R_T}$ et r. L'interaction gravitationnelle est-elle attractive ou répulsive ? Dans la suite, on supposera que le satellite est soumis uniquement à $\overrightarrow{\mathrm{F}}$.

3) Soit $\overrightarrow{\mathrm{L_0}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge m\overrightarrow{v_\mathrm{M}}$. Comment s'appelle cette grandeur mécanique associée au satellite ? Déterminer son expression dans la base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{k})$, puis sa norme $\mathrm{L_0}$ en fonction de r, $\dot{\theta}$ et m. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{L_0}}$ est constant au cours du mouvement.

1.2 Mise en orbite circulaire du satellite

La mise en orbite terrestre d'un satellite se fait en deux étapes :

- ⋆ phase balistique : le satellite s'éloigne de la Terre sur une ellipse de foyer le centre de la Terre jusqu'à l'apogée ;
- ⋆ phase de satellisation : la satellite accélère pour obtenir une trajectoire circulaire autour de la Terre.

On considère que le satellite est placé en orbite circulaire de rayon r constant autour de la Terre.

4) Exprimer pour cette trajectoire circulaire le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{\mathrm{M}}}$ et le vecteur accélération $\overrightarrow{a_{\mathrm{M}}}$ du satellite uniquement en fonction de la quantité $v = r\dot{\theta}$, de sa dérivée temporelle $\dot{v}$ et de r.
5) À l'aide du principe fondamental de la dynamique, montrer que le mouvement est uniforme et exprimer v^2 en fonction de g_0, $\mathrm{R_T}$ et r.
6) En déduire l'expression des énergies cinétique $\mathcal{E}_{\mathrm{c}}$ et mécanique $\mathcal{E}_{\mathrm{m}}$ du satellite en fonction de m, g_0, $\mathrm{R_T}$ et r. Justifier le signe de $\mathcal{E}_{\mathrm{m}}$.
7) Application numérique : calculer l'énergie mécanique du satellite pour une trajectoire circulaire de rayon $r_{\mathrm{b}} = 8{,}0.10^3$ km, puis pour un rayon $r_{\mathrm{h}} = 40.10^3$ km. Rappel : $64 = 2^6$.

1.3 Étude énergétique du satellite

On suppose ici que la trajectoire du satellite n'est pas nécessairement circulaire.

8) Montrer que l'énergie mécanique du satellite est constante au cours du mouvement et qu'elle se met sous la forme

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\mathrm{L}_0^2}{2mr^2} - g_0 m\frac{\mathrm{R_T^2}}{r}.$$

9) On appelle énergie potentielle effective

$$\mathcal{E}_{\mathrm{p,eff}}(r) = \mathcal{E}_{\mathrm{m}} - \frac{1}{2}m\dot{r}^2.$$

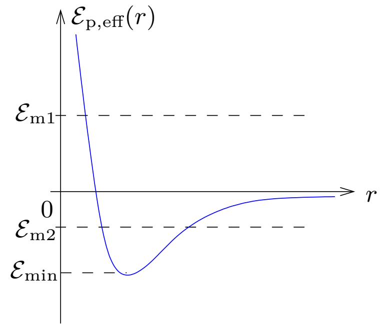


Figure 3 - Allure de l'énergie potentielle effective en fonction de r

Au cours du mouvement, les valeurs du rayon r sont données par l'inégalité $\mathcal{E}_{\mathrm{p,eff}}(r) \leqslant \mathcal{E}_{\mathrm{m}}$. Expliquer ce résultat.
10) Le graphe de $\mathcal{E}_{\mathrm{p,eff}}(r)$ pour une valeur donnée de L_0 est représenté figure 3. On montre que la trajectoire du satellite est nécessairement une conique : circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique.
a) À quelle énergie $\mathcal{E}_{m1}$ ou $\mathcal{E}_{m2}$ peut correspondre une trajectoire elliptique ? une trajectoire hyperbolique ?
b) Pour quelle valeur particulière de $\mathcal{E}_m$ la trajectoire est-elle circulaire ?

1.4 Mise en orbite haute du satellite

Pour atteindre des trajectoires de très hautes altitudes, le satellite est dans un premier temps placé sur une *trajectoire circulaire basse* ($r_{\mathrm{b}} = 8{,}0.10^3$ km) puis, dans un deuxième temps, sur une *trajectoire circulaire haute* ($r_{\mathrm{h}} = 40.10^3$ km) comme illustré sur la figure 4.

Pour passer de la trajectoire basse à la trajectoire haute, on utilise une trajectoire de transfert elliptique dont l'un des foyers est le centre de la Terre O : son périgée P est situé sur l'orbite basse et son apogée A sur l'orbite haute.

Le changement d'orbite s'effectue en réalisant des variations brutales de vitesse du satellite à l'aide des moteurs qui correspondent à des variations d'énergie mécanique que l'on cherche à déterminer.

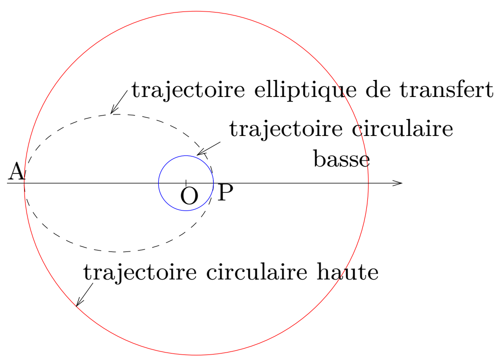


Figure 4

On considère désormais le satellite parcourant la trajectoire elliptique de transfert.

11) Que peut-on dire des valeurs de $\dot{r}$ lorsque le satellite est en A ($r = r_\mathrm{h}$) ou en P ($r = r_\mathrm{b}$) ? Comment s'exprime le demi-grand axe a de l'ellipse de transfert en fonction de r_b et r_h ?
12) Montrer à l'aide de la conservation de l'énergie mécanique que r_h et r_b sont solutions d'une équation du second degré de la forme $r^2 + \alpha r + \beta = 0$. Exprimer α et β en fonction de m, L_0, $\mathcal{E}_\mathrm{m}$, g_0 et $\mathrm{R_T}$.
13) En déterminant la somme des racines de l'équation, en déduire que $\mathcal{E}_\mathrm{m,t} = -\dfrac{g_0 m \mathrm{R_T^2}}{2a}$.
14) Relever sur la figure 5 la valeur de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_\mathrm{m,t}$ du satellite sur la trajectoire de transfert elliptique. Justifier.

Pour changer de trajectoire le satellite, il faut modifier la valeur de son énergie mécanique. Durant cette phase le principe de conservation de l'énergie n'est plus vérifié. Ce sont les moteurs du satellite qui vont permettre d'accélérer ou de ralentir le satellite.

15) Relever sur la figure 5 la valeur de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_\mathrm{m,b}$ du satellite sur l'orbite circulaire basse de rayon $r_\mathrm{b} = 8{,}0.10^3$ km. De même relever la valeur de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_\mathrm{m,h}$ du satellite sur l'orbite circulaire haute de rayon $r_\mathrm{h} = 40.10^3$ km.
16) En déduire la variation d'énergie mécanique $\Delta\mathcal{E}_\mathrm{mP}$ à communiquer au satellite pour passer en P de l'orbite circulaire basse à l'orbite elliptique de transfert. Sachant que le pouvoir calorifique du carburant est d'environ 50 MJ.kg^{-1}, déterminer la masse m_c de carburant nécessaire.
17) Connaissez vous un carburant utilisé dans les moteurs-fusées pour l'aérospatiale ? Qu'appelle - t - on orbite géostationnaire ? Connaissez-vous l'altitude de cette orbite ?

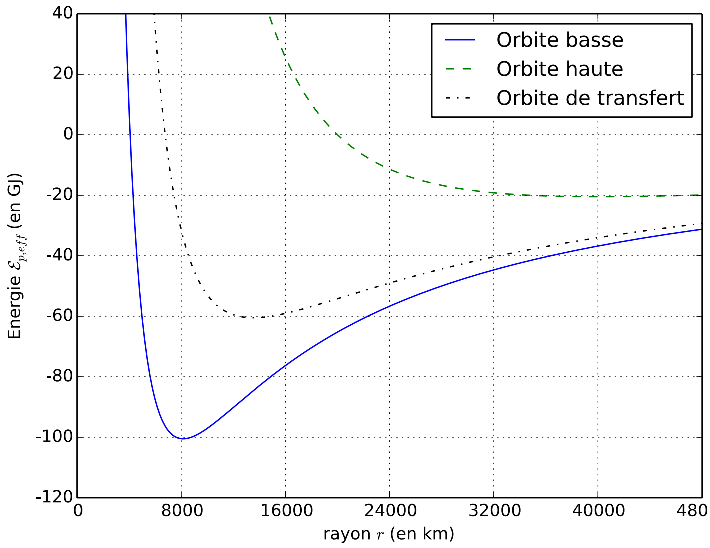


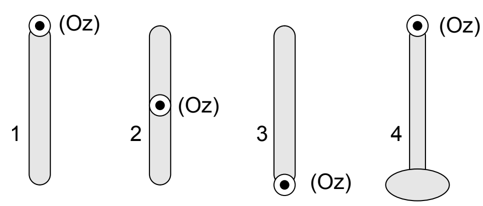
Figure 5 - $\mathcal{E}_\mathrm{p,eff}(r)$ pour les 3 orbites

II Mesure de la pesanteur terrestre

L'objectif est d'étudier deux méthodes de mesure de la pesanteur g en un point à la surface de la Terre. Ces méthodes utilisent tour à tour deux types différents de pendule.

II.1 Questions introductives

1. **a -** Rappeler l'unité SI du moment d'inertie J d'un solide par rapport à un axe Oz.
   b - On considère les quatre solides ci-contre, tous de même masse et faits dans le même matériau. Classer les moments d'inertie par ordre croissant.



2. Donner l'énoncé du théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe Oz fixe à la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$.

II.2 Utilisation d'un pendule sans ressort de rappel

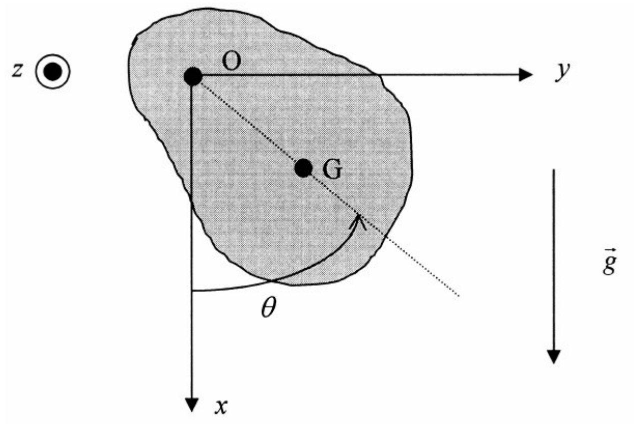
Un pendule est composé par un solide de masse m, de centre d'inertie G, mobile autour d'un axe horizontal Oz et de moment d'inertie J par rapport à cet axe.

La position du pendule est repérée par l'angle θ entre la droite (OG) et la verticale descendante. On notera a la distance OG.

L'étude sera menée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Les frottements au niveau de l'axe de rotation et les frottements de l'air seront négligés.

Le pendule ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur $\vec{g}$ tel que $\vec{g} = g\vec{e}_x$.



3. Quelle est le type de trajectoire d'un point quelconque de ce pendule ?

On note $\dot{\theta}$ la vitesse angulaire du pendule. Donner la relation entre la norme de la vitesse d'un point M, la distance OM, et $\dot{\theta}$.

4. **a -** En appliquant le théorème du moment cinétique, établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ au cours du temps.

b - En déduire la période T des petites oscillations du pendule autour de sa position d'équilibre, repérée par $\theta = 0$. On exprimera T en fonction de J, m, g et a.

5. On souhaite étudier l'influence de la variation d'intensité Δg du champ de pesanteur sur la période du pendule. Pour cela, on définit la sensibilité s du pendule comme le rapport $s = \dfrac{\Delta T}{T}$ où ΔT représente une variation infiniment petite de la période du pendule engendrée par une variation infiniment petite Δg du champ de pesanteur.

a - On note T la période mesurée lorsque l'intensité de la pesanteur est g, et $T' = T + \Delta T$ la période mesurée lorsqu'elle vaut $g' = g + \Delta g$.

Exprimer T' en fonction de T et de $\Delta g/g$.

Pour cela, on rappelle qu'on a au premier ordre en ε : $(1+\varepsilon)^{\alpha} \simeq 1 + \alpha\varepsilon$. Attention, ε est nécessairement une grandeur sans unité.

b - Déterminer l'expression de la sensibilité s en fonction de Δg et g.

II.3 Utilisation d'un pendule avec ressort spirale de rappel

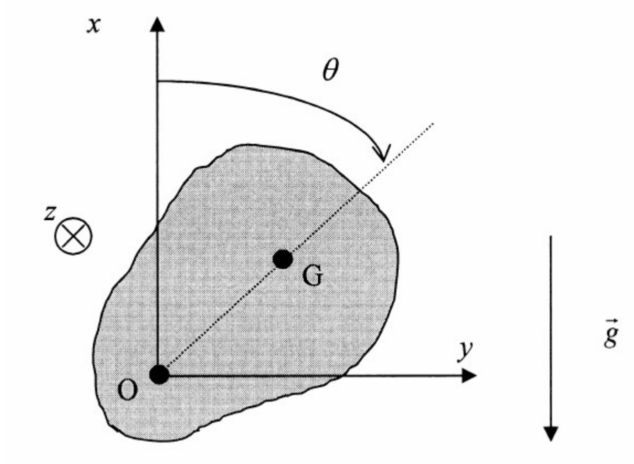
On cherche à améliorer la sensibilité du dispositif.

Le pendule précédent est maintenant soumis à l'action d'un ressort spirale qui exerce sur le pendule un couple de rappel dont l'expression est $M = -K\theta$, où K est une constante positive qui représente la raideur du ressort.

La position du pendule est repérée par l'angle θ entre la droite (OG) et la verticale ascendante (**attention**, les conventions ont donc changé par rapport à la partie précédente).

On effectue les mêmes hypothèses que précédemment (référentiel galiléen, aucun frottements).

L'énergie potentielle du ressort spirale ne dépend que de θ et est donnée par $E_p = \dfrac{1}{2}K\theta^2$.



6. Montrer que l'énergie potentielle de pesanteur du pendule peut s'écrire $E_{\text{p,pes}} = mga\cos\theta$.

7. **a -** Exprimer l'énergie mécanique totale $E_m(\theta,\dot{\theta})$ du système pendule-ressort.

b - En déduire l'équation du mouvement du pendule.

Étude de la position d'équilibre en $\theta = 0$

8. **a -** En raisonnant sur l'énergie potentielle totale $E_p(\theta)$, montrer que la position $\theta = 0$ est une position d'équilibre.

b - Déterminer la condition à respecter pour que la position $\theta = 0$ soit une position d'équilibre stable. La relation sera donnée sous la forme d'une relation entre K, m, g et a.

On considère dans la suite que cette condition est respectée. De plus, on suppose les oscillations de petite amplitude.

9. Montrer que la période T des petites oscillations du pendule autour de la position $\theta = 0$ est

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{K - mga}}.$$

10. On veut déterminer la sensibilité s_1 de ce pendule, que l'on définit de la même façon que précédemment. Les calculs étant un peu plus compliqués que dans le cas précédent, on procède en plusieurs étapes :

a - On considère encore $T' = T + \Delta T$. Exprimer $\dfrac{1}{T^2} - \dfrac{1}{T'^2}$ en fonction de ΔT et de T seulement.

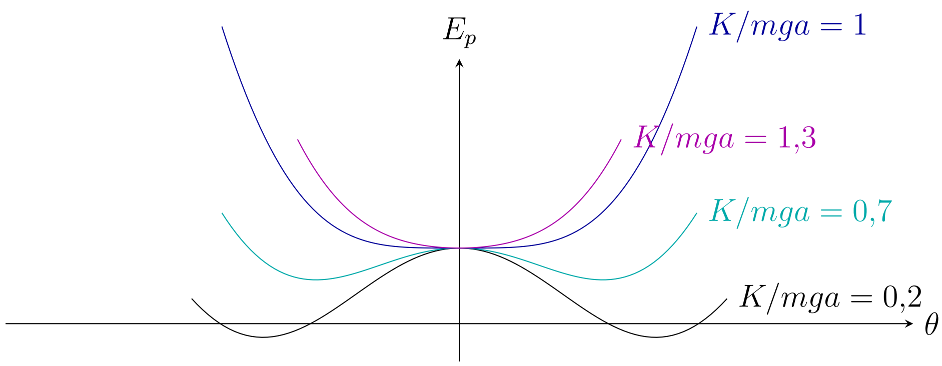
b - Indépendamment de la question précédente, exprimer $\dfrac{1}{T^2} - \dfrac{1}{T'^2}$ en fonction de K, m, g, a, J, et Δg.

c - Conclure en donnant l'expression de la sensibilité $s_1 = \dfrac{\Delta T}{T}$ en fonction de K, m, g, a et Δg.

11. Montrer que ce pendule avec ressort de rappel permet, sous une condition portant sur K et d'autres grandeurs à préciser, d'obtenir une sensibilité plus grande que celle du pendule sans ressort.

Étude des autres positions d'équilibre

On donne ci-dessous le tracé de l'énergie potentielle totale $E_p(\theta)$.



12. Commenter ces courbes : lister les positions d'équilibre et donner leur stabilité en fonction de la valeur du paramètre K/mga.

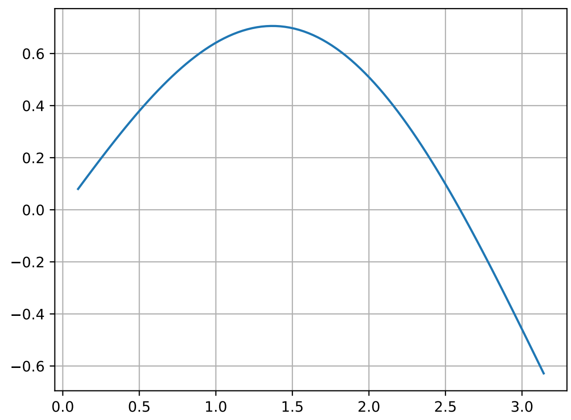
On souhaite obtenir la valeur de la position d'équilibre $\theta > 0$ la plus petite. Il faut pour cela résoudre l'équation $\sin\theta = p\,\theta$, avec $p = K/mga < 1$ une constante fixée. On utilise un algorithme de recherche dichotomique.

On pose $x = \theta$ et $f(x) = \sin(x) - px$. On cherche à résoudre $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0{,}1, \pi]$.

On utilise le langage Python, on suppose que les bibliothèques nécessaires sont importées et que le script commence déjà par les lignes suivantes :

```
p = 0.2
def f(x):
    return sin(x)-p*x
```

Ci-contre un tracé de f sur $[0{,}1, \pi]$.



12. Proposer un script Python qui permet d'obtenir ce graphique. Il faudra construire les valeurs de x.

13. Quelles sont les propriétés de f, visibles sur le graphique, qui permettent d'appliquer la méthode de dichotomie sur l'intervalle considéré ?

14. Compléter l'algorithme de dichotomie ci-dessous pour qu'il retourne la valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

```
epsilon = 1e-6
a = 0.1
b = pi

while               # à compléter
    m = (a+b)/2
    if              # à compléter
        a=          # à compléter
        b=          # à compléter
    else:
        a=          # à compléter
        b=          # à compléter

print(m)
```

Remarques qui ne sont pas utiles pour répondre aux questions :

Le gravimètre à ressort spirale a été inventé par Fernand Holweck et Pierre Lejay dans les années 1920. Il permettait des mesures très précises de la pesanteur, ce qui sert par exemple pour la recherche de gisement miniers ou pétrolifères (la différence de densité des minerais ou de poches de pétrole entraîne d'infimes variations de pesanteur, qui sont exploitables).

L'image ci-dessous montre un exemplaire actuellement à l'observatoire de Besançon, fabriqué en 1931. La tige du pendule est dans le cylindre protecteur métallique, dans une ampoule sous vide pour minimiser les frottements. Une lunette de visée microscopique permet de visualiser ses oscillations. La tige est en quartz et la lame de rappel dans un alliage (l'invar) spécial qui minimise sa dilatation due aux changements de température, qu'un thermomètre permet par ailleurs de contrôler. Il s'agit donc d'un instrument de précision.

Aujourd'hui d'autres techniques de gravimétrie existent, plus précises encore.