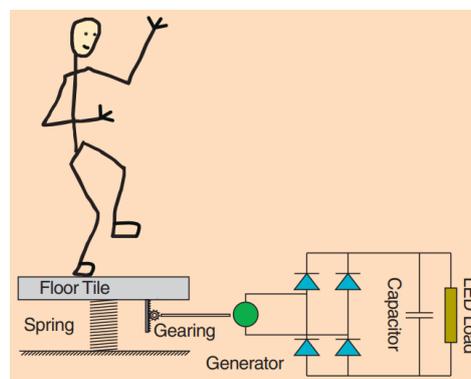
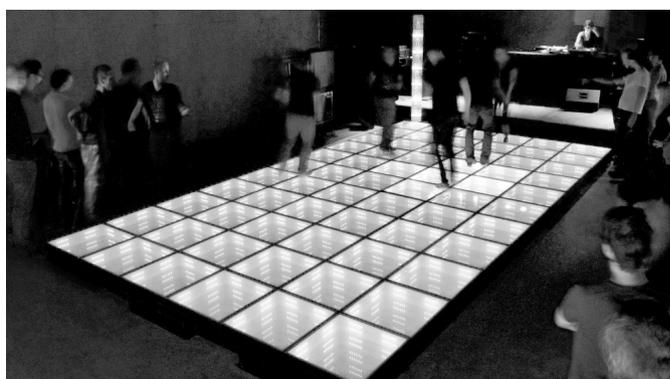


- **Calculatrices interdites.**
- Toute A.N. sans **unité** ne comptera aucun point, et dégradera l'humeur du correcteur.
- Vérifiez l'**homogénéité** de vos relations.
- Encadrez vos résultats et soignez votre copie.

## I Récupération de l'énergie de vibration

Les vibrations du sol, provoquées par les piétons, les véhicules ou le vent, peuvent fournir une énergie récupérable au moyen de dispositifs qui font l'objet de recherches récentes. Il existe par exemple des systèmes de dalles pour piétons qui produisent de l'énergie électrique, dalles qui sont disposées sur la chaussée ou, comme ici, sur une piste de danse (document 1).



**Document 1** : exemple de dispositif de récupération d'énergie des vibrations du sol.  
D'après le fabricant, chaque dalle peut générer 35 W.

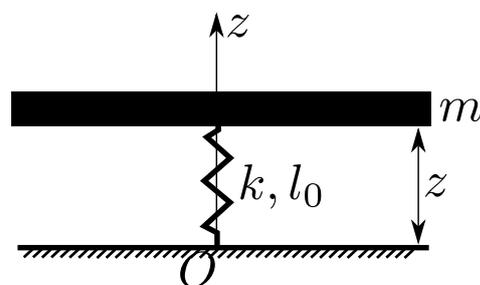
Source pour ce document et pour les valeurs exploitées dans l'énoncé : article "Power from the people" de DOI [10.1109/MIAS.2010.939649](https://doi.org/10.1109/MIAS.2010.939649).

Nous étudions ici la réponse mécanique de ce système.

### I.1 Étude en régime libre

En première approximation, le système est modélisé comme une masse  $m$  (qui comprend le danseur et la dalle support) posée sur un ressort et astreinte à se déplacer verticalement. C'est donc le système du document 2 qui nous intéresse.

On note  $k$  la raideur du ressort,  $l_0$  sa longueur à vide et  $l$  sa longueur. Il exerce sur la masse  $m$  une force  $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}_z$ . Le champ de pesanteur de norme  $g$  est dirigé vers le bas de la figure.



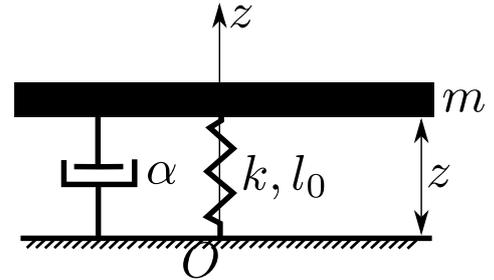
**Document 2** : modèle simplifié du système réel.

- 1 - En raisonnant sur le système du document 2 et à l'aide d'un bilan des forces, établir l'expression de la position d'équilibre  $z_{\text{eq}}$  de la masse, en fonction de  $k$ ,  $l_0$ ,  $m$  et  $g$ .

- 2 - Établir ensuite l'équation différentielle suivie par la variable  $z(t)$  lorsque le système est mis en mouvement.
- 3 - Donner l'expression générale des solutions de cette équation, sans déterminer la ou les constantes d'intégration.
- 4 - Tracer l'allure de la solution, en supposant que la masse est lâchée d'une position  $z_1$  supérieure à sa position d'équilibre et sans vitesse initiale. On fera figurer  $z_1$  sur le graphique.

On constate expérimentalement que les oscillations sont amorties. Pour rendre compte de ceci, il est nécessaire d'ajouter au modèle du document 2 un amortissement. On obtient alors le modèle du document 3.

L'amortisseur exerce sur la masse une force  $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$  avec  $\vec{v}$  le vecteur vitesse de la masse et  $\alpha$  une constante positive.



**Document 3** : modèle simplifié du système réel qui prend en compte l'amortissement.

- 5 - En raisonnant sur le système du document 3, établir l'équation différentielle suivie par la variable  $z(t)$ .
- 6 - Mettre l'équation obtenue sous la forme :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_e, \quad (1)$$

avec  $\omega_0$ ,  $Q$  et  $z_e$  des constantes dont on donnera les expressions en fonction de  $m$ ,  $k$ ,  $l_0$ ,  $g$  et  $\alpha$ .

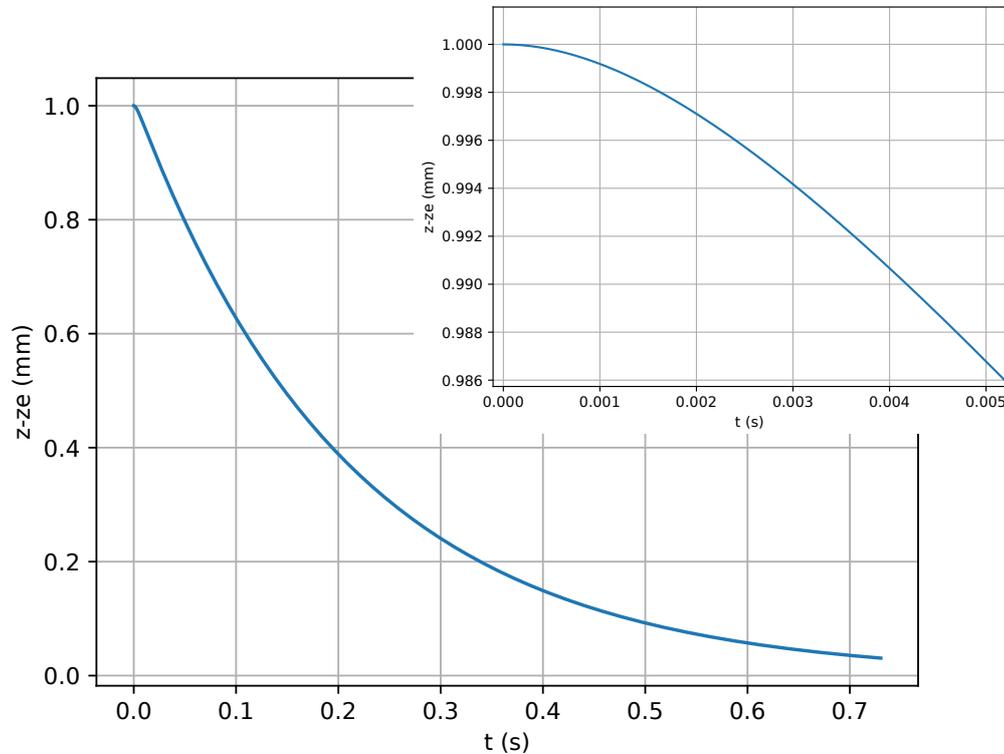
- 7 - Rappeler les noms des trois régimes possibles pour les solutions de ce type d'équation différentielle du second ordre, et indiquer les valeurs du facteur de qualité  $Q$  qui correspondent à chaque régime.

D'après le tableau de valeurs numériques ci-dessous, dans quel régime est-on ?

Tableau des paramètres retenus par le constructeur, et valeurs déduites pour quelques grandeurs :

$m$	$k$	$\alpha$	$\omega_0$	$Q$	$z_e - l_0$	$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$f_0 = \frac{1}{T_0}$
80 kg	$1,5 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$	$3,0 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$	43 rad · s <sup>-1</sup>	0,11	-5 mm	0,15 s	6,9 Hz

- 8 - Pour le régime considéré ici, donner l'expression générale des solutions de l'équation (1). Cette expression fera intervenir  $\omega_0$ ,  $Q$ ,  $z_e$ ,  $t$ , et deux constantes d'intégration qu'on ne cherchera pas à déterminer.
- 9 - Le document 4 ci-contre montre le tracé de la solution  $z(t) - z_e$ . En déduire les conditions initiales qui ont été choisies pour ce tracé.



Document 4 : tracé de  $z(t) - z_e$  et zoom aux temps courts.

## 1.2 Étude en régime sinusoïdal forcé

Dans la pratique, le système est mis en mouvement par le danseur qui, debout sur la dalle, bouge de haut en bas. Il est alors nécessaire d'étudier la réponse du système en régime sinusoïdal forcé.

On prend la hauteur d'équilibre de la dalle comme origine, on a donc désormais  $z_e = 0$ .

- On note  $z_d(t) = A \cos(\omega t)$  la hauteur du centre de masse du danseur (à une constante additive près). Le facteur  $A$  est positif.
- On étudie le régime permanent où la position de la dalle, repérée par rapport à sa position d'équilibre, est de la forme  $z(t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi)$  avec  $Z_m > 0$ .
- On utilise la représentation complexe :  $z_d(t)$  est représenté par  $\underline{z}_d(t) = A e^{j\omega t}$ , et  $z(t)$  est représenté par  $\underline{z}(t) = \underline{Z}_m e^{j\omega t}$  avec  $\underline{Z}_m = Z_m e^{j\varphi}$ . (Avec comme d'habitude  $j$  le complexe tel que  $j^2 = -1$ ).

On admet qu'une démarche similaire à celle de la sous-partie précédente mène à l'équation du mouvement suivante :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = -\mu \ddot{z}_d, \quad (2)$$

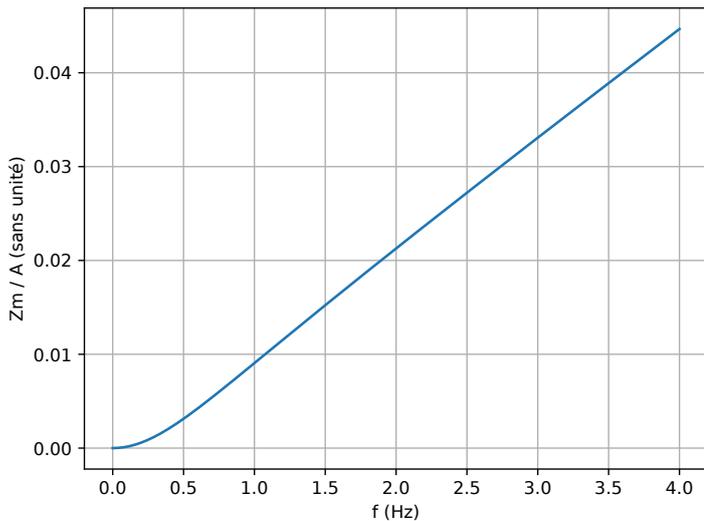
avec les mêmes valeurs numériques que dans le tableau précédent pour  $\omega_0$  et  $Q$ , et avec  $\mu$  une constante donnée par  $\mu = (\text{masse du danseur})/m \simeq 0,7$ .

- 10** - À partir de cette équation, établir l'expression de l'amplitude complexe  $\underline{Z}_m$  en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_0$ ,  $Q$ ,  $\mu$  et  $A$ .
- 11** - En déduire une expression de l'amplitude  $Z_m$  en fonction des mêmes paramètres.
- 12** - Donner l'expression de la limite de  $Z_m$  à basse fréquence. Faire de même à haute fréquence.

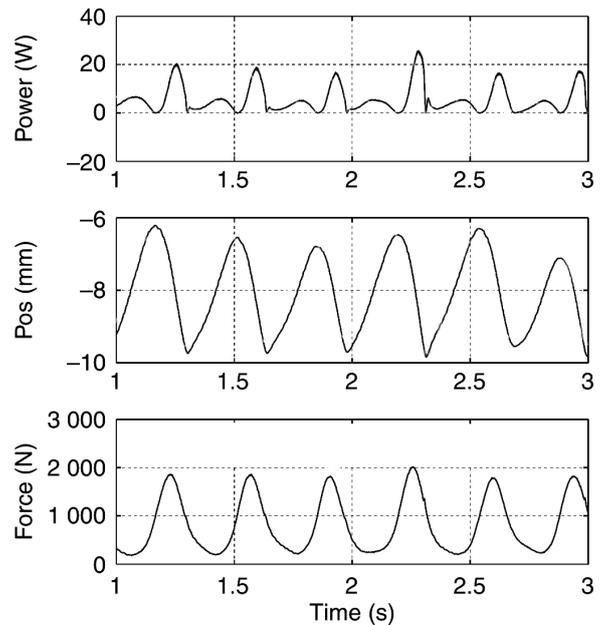
On admet qu'en posant  $u = \frac{\omega_0}{\omega}$ , on peut écrire  $Z_m = \frac{A\mu}{\sqrt{(u^2 - 1)^2 + u^2/Q^2}}$ .

- 13** - Montrer qu'il existe un phénomène de résonance à condition que  $Q$  vérifie une certaine inégalité qu'on établira.

Y a-t-il existence d'une résonance pour le système considéré ici ?



**Document 5** : tracé de  $Z_m/A$  en fonction de la fréquence, à basse fréquence, à partir de l'expression établie dans cette sous-partie.



**Document 6** : expérience réelle avec un danseur sur la dalle (document fourni par le constructeur). De bas en haut : enregistrement de la force produite par le danseur sur la dalle, de la position  $z(t)$  de la dalle par rapport au sol (par rapport à une origine arbitraire) et de la puissance électrique produite en sortie du dispositif.

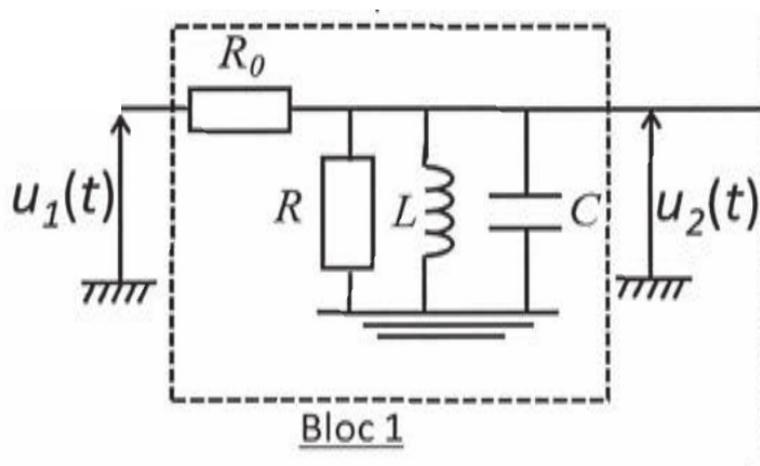
On s'intéresse maintenant à une confrontation entre notre modèle et un enregistrement en situation réelle. En exploitant les documents 5 et 6 :

- 14** - Proposer une estimation de la valeur de la fréquence  $f$  d'excitation, ainsi que de la valeur de  $Z_m$  à cette fréquence.
- 15** - En déduire une estimation de la valeur de l'amplitude  $A$  des mouvements du danseur.

16 - D'autre part, sachant que d'après l'équation (2), la force exercée par le danseur sur la dalle s'écrit  $F = -(\text{masse danseur}) \times \ddot{z}_d$ , estimez l'amplitude de cette force (la masse du danseur est de 60 kg).

Cette amplitude est-elle du même ordre de grandeur que celle mesurée par le constructeur dans le document 6 ?

## II Étude d'un bloc filtre



On étudie le filtre schématisé ci-contre. Sa fonction de transfert complexe est  $\underline{H} = \underline{u}_2 / \underline{u}_1$ .

17 - Par une étude asymptotique à basse et haute fréquence, déterminer la nature de ce filtre.

### II.1 Étude des diagrammes de Bode

On admet pour l'instant que la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{A_0}{1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right)}, \quad (3)$$

avec  $A_0 = 0,1$ ,  $Q = 25$ ,  $x = \omega / \omega_0$ .

On donne  $20 \log \frac{A_0}{Q} = -48$ .

18 - Donner un équivalent à basse fréquence, puis à haute fréquence, de  $\underline{H}$ .

On s'intéresse au diagramme de Bode en amplitude de ce filtre, c'est-à-dire au tracé de l'évolution du gain en décibels en fonction de  $\log(x)$ .

19 - Donner les équations des deux asymptotes basse et haute fréquence du gain en décibels de ce filtre (préciser leur pente et leur valeur en  $x = 1$ ).

20 - Donner la valeur du gain en décibel de ce filtre pour  $x = 1$ .

**21** - Représenter le diagramme de Bode en amplitude, c'est-à-dire l'évolution du gain en décibels de ce filtre en fonction de  $\log(x)$ . On fera figurer les asymptotes, et le gain en décibel du filtre.

On s'intéresse ensuite au diagramme de Bode en phase, c'est-à-dire au tracé de l'évolution du déphasage  $\Delta\varphi$  induit par ce filtre en fonction de  $\log(x)$ .

**22** - Donner les limites basse et haute fréquence de  $\Delta\varphi$ .

**23** - Donner la valeur de  $\Delta\varphi$  pour  $x = 1$ .

**24** - Représenter le diagramme de Bode en phase, c'est-à-dire l'évolution de  $\Delta\varphi$  en fonction de  $\log(x)$ .

## II.2 Établissement de la fonction de transfert

On souhaite ici exprimer la fonction de transfert  $\underline{H}$  du filtre en fonction de  $R_0$ ,  $R$ ,  $L$  et  $C$  (et  $\omega$ ).

On assimile l'ensemble {résistance  $R$  + bobine + condensateur} à une seule impédance équivalente  $\underline{Z}_{\text{eq}}$ .

**25** - Donner une expression de  $\underline{Z}_{\text{eq}}$  (ou de  $1/\underline{Z}_{\text{eq}}$ , au choix).

**26** - Établir l'expression de  $\underline{H}$  en fonction de  $R_0$ ,  $R$ ,  $L$  et  $C$  (et  $\omega$ ).

**27** - On indique que  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Par identification avec l'expression (3), donner les expressions littérales de  $A_0$  et  $Q$  en fonction de  $R_0$ ,  $R$ ,  $L$  et  $C$ .

## II.3 Action sur un signal

On envoie en entrée du filtre le signal  $e(t) = E_1 \cos(2\pi f_1 t) + E_2 \cos(2\pi f_2 t)$  avec  $f_1 = 820$  Hz,  $f_2 = 1$  kHz,  $E_1 = E_2 = 10$  V.

La fréquence propre du filtre est telle que  $G_{\text{dB}}(f_1) = -40$  dB, et  $G_{\text{dB}}(f_2) = -20$  dB.

On a également  $\Delta\varphi(f_1) = 1,47$  rad et  $\Delta\varphi(f_2) = 0$  rad.

**28** - En déduire la valeur du gain  $G$  à ces deux fréquences.

**29** - Le signal de sortie s'écrit  $s(t) = S_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + S_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2)$ . Donner les valeurs de  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ .