Physique-chimie – DS 3

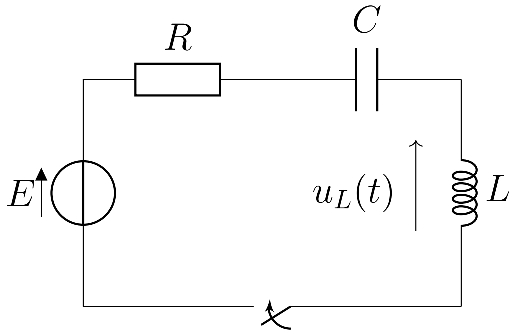
- **Calculatrices interdites.**
- Toute A.N. sans **unité** ne comptera aucun point, et dégradera l'humeur du correcteur.
- Vérifiez l'**homogénéité** de vos relations.
- Encadrez vos résultats et soignez votre copie.

On donne $\tan 20° = 0{,}36$, $\cos 20° = 0{,}94$, $\sin 20° = 0{,}34$, $1/\tan 20° = 0{,}28$.

I Production d'une tension sinusoïdale à partir d'une tension continue

Un appareil photographique est alimenté par une pile de tension $E = 1{,}5\,\mathrm{V}$. Pour fonctionner, son flash a besoin d'une tension bien plus importante, de l'ordre de $300\,\mathrm{V}$. Celle-ci est obtenue à l'aide d'un transformateur. Ce dernier a besoin pour fonctionner d'une tension alternative.
Il faut donc transformer la tension continue E en une tension alternative sinusoïdale.

Pour produire une telle tension, on utilise le montage ci-contre. Le condensateur est initialement déchargé.
On a $C = 25\,\mathrm{nF}$, $L = 36\,\mathrm{mH}$, $E = 1{,}5\,\mathrm{V}$, et R est la résistance interne de la pile.



On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.

1 - Donner en justifiant la valeur à l'instant $t = 0^+$ du courant i, de la tension aux bornes de la résistance, de la tension u_C aux bornes du condensateur, et de la tension u_L aux bornes de la bobine.

2 - Montrer que la tension aux bornes de la bobine suit l'équation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_L}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_L = 0, \qquad (1)$$

et donner l'expression de ω_0 et de Q en fonction de R, L et C.

On pourra pour aboutir à l'équation partir de la loi des mailles et la dériver une ou plusieurs fois par rapport au temps.

3 - Montrer qu'il va y avoir production d'oscillations seulement si $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

Faire l'application numérique pour obtenir la valeur limite de R.

On supposera la résistance suffisamment petite pour vérifier ce critère par la suite.

4 - Tracer l'allure de la tension $u_L(t)$ entre l'instant où l'on ferme l'interrupteur et un instant suffisamment long.

Quel est le paramètre qui donne l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations ?

Pour répondre à la problématique posée en début de cette partie, quel type de facteur de qualité faut-il ?

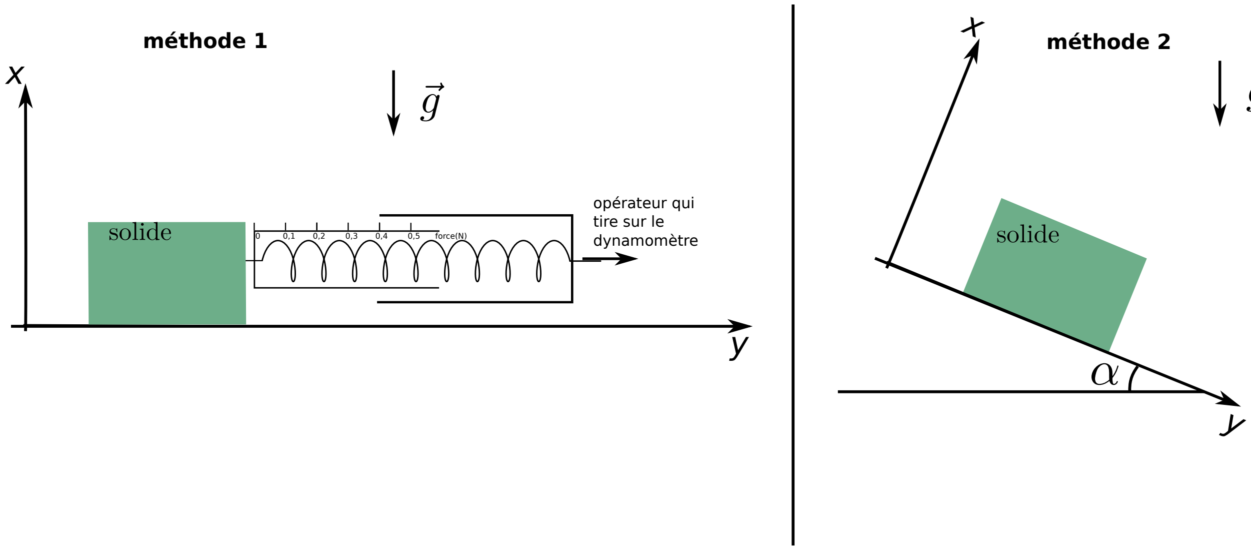
Les solutions de l'équation 1 sont du type $u_L(t) = [A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]\mathrm{e}^{-\beta t}$, avec $\omega = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$ et $\beta = \dfrac{\omega_0}{2Q}$. Il y a deux constantes d'intégration A et B, et il faut donc deux conditions initiales pour les déterminer : par exemple une sur $u_L(0^+)$ et une sur $\dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}(0^+)$. On a déjà donné la valeur de $u_L(0^+)$.

5 - Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\dfrac{RE}{L}$.

On pourrait ensuite déterminer A et B, mais nous ne le ferons pas.

II Frottements de Coulomb

On considère un objet de masse m posé sur une surface (par exemple un cube de métal posé sur une table en métal). On souhaite déterminer le coefficient de frottement f entre la surface de l'objet et la surface sur laquelle il est posé. On utilise pour cela deux méthodes. On rappelle la loi de Coulomb du frottement : il y a immobilité tant que $\|\vec{T}\| \leq f\|\vec{N}\|$.



Méthode 1 : Le plan de travail est horizontal. On tire sur l'objet à l'aide d'un dynamomètre, jusqu'à ce que l'objet soit entraîné. Au moment où il est entraîné, on note la valeur de la force F lue sur le dynamomètre.

6 - Faire un bilan des forces dans la situation où on tire sur l'objet, lorsqu'il est encore immobile. On les fera apparaître sur le schéma de l'énoncé.

Puis exprimer les parties normales et tangentielle $\vec{N}$ et $\vec{T}$ de la réaction du support.

7 - Exprimer la condition d'immobilité à l'aide des lois de Coulomb. Puis en déduire l'expression du coefficient de frottement f en fonction de m, g et F.

8 - A.N. : Pour un cube en métal posé sur une surface métallique, on mesure $F = 0{,}4\,\mathrm{N}$ comme sur le schéma ci-dessus, pour une masse $m = 200\,\mathrm{g}$. Que vaut f ? On prendra $g = 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

Méthode 2 : On pose l'objet sur le plan horizontal, puis on incline progressivement le plan par rapport à l'horizontale. Au bout d'un certain angle d'inclinaison, l'objet glisse.

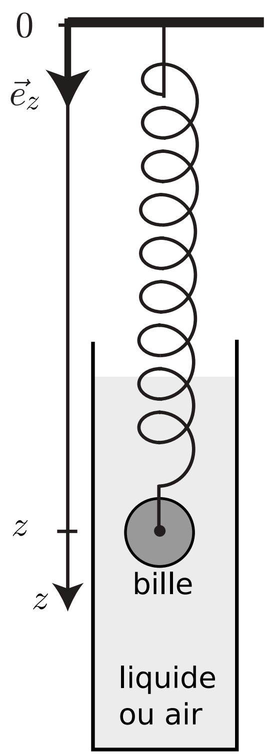
9 - Faire un bilan des forces sur l'objet immobile. On les fera apparaître sur le schéma de l'énoncé.

10 - Appliquer le PFD à l'objet immobile pour exprimer les parties normales et tangentielle $\vec{N}$ et $\vec{T}$ de la réaction du support en fonction de m, g et α.

11 - Exprimer la condition d'immobilité à l'aide des lois de Coulomb. Puis en déduire l'expression du coefficient de frottement f en fonction des paramètres du problème.

12 - A.N. : Pour un morceau de bois posé sur une planche en bois, on trouve qu'il y a glissement lorsque $\alpha = 20^\circ$. Que vaut f ? On prendra $g = 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

III Viscosimètre oscillant



On étudie ici une méthode d'estimation de la viscosité d'un fluide. Le dispositif est le suivant : une sphère en acier de rayon R et masse m est immergée dans un fluide, et suspendue à un ressort (raideur k, longueur l, longueur à vide l_0). On prendra l'axe z comme défini sur le schéma ci-contre.
Les forces de frottement sont décrites par la loi de Stokes (valide seulement à faible vitesse) :

$$\vec{f} = -6\pi R\eta\vec{v}$$

avec $\vec{v}$ la vitesse de la bille et η la viscosité du fluide.

Position d'équilibre

On note ρ_0 la masse volumique de la sphère d'acier et ρ_f la masse volumique du fluide.

13 - Donner l'expression de la poussée d'Archimède qui s'exerce sur la sphère d'acier, en fonction entre autres de son volume qu'on notera V.

14 - Montrer que la somme du poids et de la poussée d'Archimède s'écrit $\vec{P} + \vec{\Pi} = m\vec{g}_0$ avec m la masse de la bille d'acier et $\vec{g}_0$ un vecteur dont on donnera l'expression en fonction de $\vec{g}$, ρ_f et ρ_0.

Ceci montre que pour prendre en compte la poussée d'Archimède, il suffit de remplacer la pesanteur $\vec{g}$ par $\vec{g}_0$.
Néanmoins, dans toute la suite **on néglige la poussée d'Archimède**.

15 - Donner l'expression de la force de rappel du ressort, en fonction de z, $\vec{e}_z$, k et l_0.

16 - Faire un bilan des forces, en déduire l'expression de la position d'équilibre $z_{\text{éq}}$ de la bille.

Équation du mouvement et changement de variable

17 - Établir l'équation du mouvement qui porte sur la coordonnée $z(t)$ de la bille.

18 - On pose $u(t) = z(t) - z_{\text{éq}}$. Montrer que $u(t)$ satisfait à l'équation suivante :

$$\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2\, u = 0. \tag{2}$$

On donnera l'expression de ω_0 et Q en fonction de m, R, k et η.

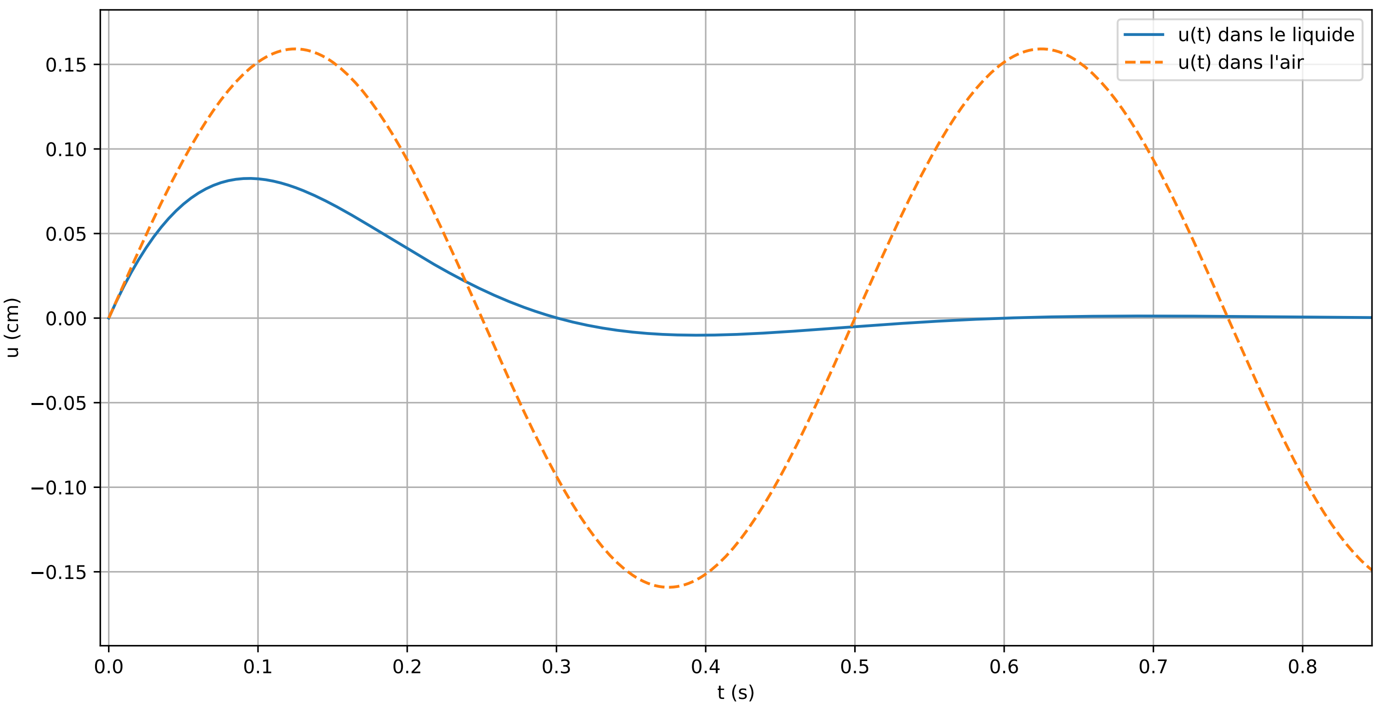
Dans l'air

On se place d'abord dans l'air. Les frottements sont alors négligeables, et on admet que ceci revient à supprimer le terme $\frac{\omega_0}{Q}\dot{u}$ dans l'équation ci-dessus.

19 - Donner alors l'expression générale de la solution $u(t)$.

Donner l'expression de la période des oscillations en fonction de k et de m.

20 - Une expérience mène au tracé ci-dessous de $u(t)$ (en traits pointillés). En déduire la valeur de la période des oscillations.



Dans un liquide

On plonge ensuite la bille dans le liquide dont on souhaite connaître la viscosité η, et on enregistre l'évolution de la position en fonction du temps (trait plein ci-dessus).

21 - D'après l'enregistrement de $u(t)$, dans quel régime est-on ? Qu'est-ce que ceci implique sur la valeur de Q ?

22 - Donner l'expression générale des solutions $u(t)$. Dans cette expression, on notera $-\mu$ le facteur devant t dans l'exponentielle, et Ω la pseudo-période. On donnera l'expression de μ et de Ω en fonction de ω_0 et Q (on attend une démonstration). On ne déterminera pas les constantes d'intégration.

23 - On note $T = 2\pi/\Omega$. Mesurer T à l'aide de l'enregistrement de $u(t)$.

24 - On admet l'expression $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - 1/(4Q^2)}$. En déduire l'expression du facteur de qualité Q en fonction de T et de $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

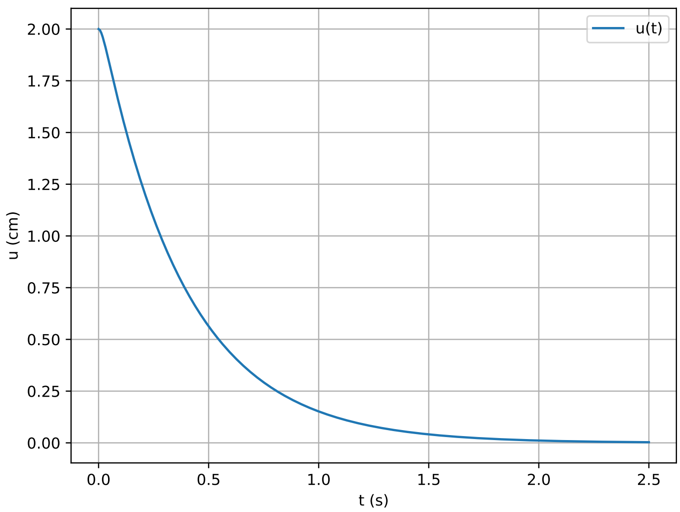
25 - À l'aide des questions précédentes, en déduire la valeur du facteur de qualité Q (on écrira le calcul avec les valeurs numériques, et on admet que le résultat est 0,9).

L'enregistrement a été effectué avec une bille de rayon $R = 5\,\mathrm{mm}$ et de masse $m = 4{,}10\,\mathrm{g}$. En déduire alors une expression de la viscosité η du fluide utilisé en fonction de grandeurs connues. On admet que l'application numérique donne $0{,}61\,\mathrm{Pa\cdot s}$.

Dans un liquide très visqueux

Dans le cas d'un liquide très visqueux, comme du miel, on obtient l'enregistrement ci-contre. L'équation différentielle suivie par $u(t)$ est toujours l'équation 2.

Initialement, la bille a été écartée d'une distance L_0 de sa position d'équilibre $z_{\text{éq}}$, et lâchée sans vitesse initiale.



26 - Donner l'expression générale de la solution $u(t)$. On introduira les deux racines r_1 et r_2 du polynome caractéristique et on donnera leurs expressions en fonction de ω_0 et de Q.

27 - Utiliser les conditions initiales afin d'obtenir l'expression complète de $u(t)$ (en fonction de r_1, r_2, L_0 et t).

28 - Quelle est, en fonction de r_1 et r_2, l'expression de la durée du régime transitoire ?

IV Chute d'une bille dans un fluide visqueux

On étudie la chute d'une bille dans un fluide visqueux, dans le but de tester si la loi de force de frottement est du type $-\lambda v(t)\,\vec{e}_z$ ou $-\lambda v(t)^2\,\vec{e}_z$ ($\vec{e}_z$ est un vecteur unitaire orienté vers le bas).
Dans le cas du modèle en v^2, l'équation du mouvement peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + a \times v^2 = a \times v_{\mathrm{lim}}^2, \tag{3}$$

avec a un paramètre inconnu et v_{lim} la vitesse limite.
Cette équation non linéaire est difficile à traiter analytiquement, et on a donc recourt à une simulation numérique : on utilise la méthode d'Euler pour obtenir la solution $v(t)$. On donne ci-dessous l'algorithme utilisé. Les ... sont des morceaux de code manquants.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

fin = 0.4              # durée simulation (secondes)
dt = fin/500           # pas de temps, assez court
nb_iterations = ...    # calcul du nombre total d'itérations nécessaires

a = 9         # paramètre en facteur de v^2
vlim = 0.95 # vitesse limite mesurée sur le graphe expérimental (m/s)

# Initialisation des listes :
liste_t = [0]
liste_v = [0]
t = 0
v = 0

for i in range(nb_iterations):
    # on dispose des variables de l'itération précédente : t et v
    # et on calcule leurs nouvelles valeurs :
    v = ...   # 1
    t = ...   # 2

    # On ajoute ces nouvelles valeurs à chaque liste :
    liste_t.append(t)
    liste_v.append(v)

plt.figure(1)
plt.plot(...)
plt.xlabel("t (s)")
plt.ylabel("v (m/s)")
plt.legend()
plt.show()
```

29 - `nb_iterations` est le nombre d'itérations de la boucle `for`. Donner son expression en fonction de la durée de la simulation (variable `fin`) et du pas de temps (variable `dt`).

30 - Au sein de la boucle `for`, que doivent être les deux instructions manquantes (repérées par `#1` et `#2`) ?

31 - Indiquer comment compléter le contenu de la commande `plot` afin de tracer la vitesse en fonction du temps.