Mécanique
Chapitre 3

Correction – DM – Spectromètre de masse

1 - On raisonne sur l'énergie mécanique, qui est conservée car le mouvement est conservatif (seule force prise en compte : la force électrique $q\vec{E}$).

– Au point S : $E_{m,S} = \frac{1}{2}mv_S^2 + qV_S = 0 + qV_S$.

– Au point O : $E_{m,O} = \frac{1}{2}mv_0^2 + qV_O$.

En égalisant les deux on obtient : $\frac{1}{2}mv_0^2 = qV_S - qV_O$. Or $U = V_S - V_O$, donc

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = qU \quad \text{et} \quad \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2qU}{m}}.}$$

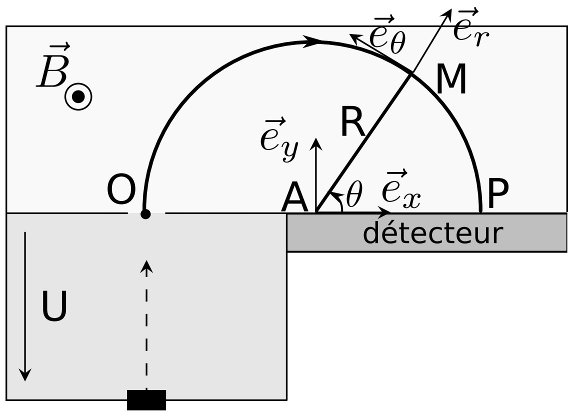
2 - En présence d'un seul champ magnétique, la force qui s'exerce sur la charge est $\vec{F} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$.

La puissance de cette force est $\boxed{\mathcal{P} = \vec{F}\cdot\vec{v} = 0}$ car $\vec{v}\wedge\vec{B}\perp\vec{v}$.

Ainsi d'après le théorème de l'énergie cinétique, E_c reste constante, <u>donc v aussi</u>.

3 - La trajectoire est un cercle comme sur la figure ci-dessous. Il faut choisir un repère polaire.

$\overrightarrow{AM} = R\vec{e}_r$, $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$.



On a aussi $\vec{v} = v\vec{e}_\theta$ avec v la composante de la vitesse (pas sa norme), donc $v = R\dot{\theta}$, donc $\dot{\theta} = \frac{v}{R}$ et on peut remplacer dans l'accélération :

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R}\vec{e}_r.$$

On sait aussi que $\ddot{\theta} = 0$ car $v = R\dot{\theta}$ est constant.
Calculons ensuite la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q\vec{v}\wedge\vec{B} = qv\vec{e}_\theta\wedge B\vec{e}_z = qvB\vec{e}_r.$$

On applique le principe fondamental de la dynamique à la charge (référentiel galiléen) :

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \text{donc} \quad -\frac{mv^2}{R}\vec{e}_r = qvB\vec{e}_r.$$

On en déduit que $-\frac{mv}{R} = qB$, donc $\boxed{R = \frac{-mv}{qB}.}$

(Il y a un moins, mais d'après notre schéma $v < 0$ et donc $-v = \|\vec{v}\| > 0$. On peut ne pas s'embêter avec ceci et prendre des valeurs absolues.)

Enfin d'après la question 1 on a l'expression de $\|\vec{v}\|$:

$$R = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2qU}{m}}, \quad \text{soit} \quad \boxed{R = \sqrt{\frac{2mU}{qB^2}}.}$$

4 - On trouve $OP = 2R = 14.4\,\text{cm}$ pour l'hydrogène, et $20.4\,\text{cm}$ pour le deuterium, dont la différence est largement mesurable !

Mécanique
Chapitre 3

Correction – DM – Spectromètre de masse

1 - On raisonne sur l'énergie mécanique, qui est conservée car le mouvement est conservatif (seule force prise en compte : la force électrique $q\vec{E}$).

– Au point S : $E_{m,S} = \dfrac{1}{2}mv_S^2 + qV_S = 0 + qV_S$.

– Au point O : $E_{m,O} = \dfrac{1}{2}mv_0^2 + qV_O$.

En égalisant les deux on obtient : $\dfrac{1}{2}mv_0^2 = qV_S - qV_O$. Or $U = V_S - V_O$, donc

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = qU \quad \text{et} \quad \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2qU}{m}}.}$$

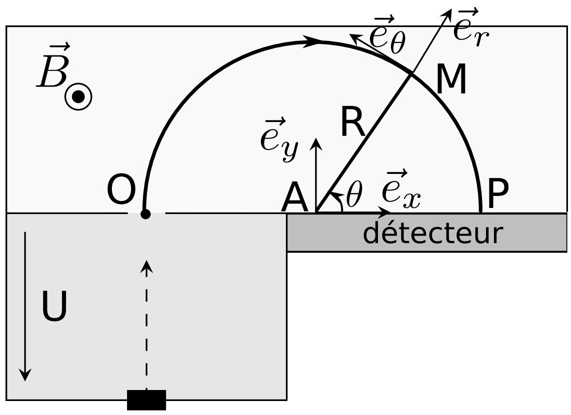
2 - En présence d'un seul champ magnétique, la force qui s'exerce sur la charge est $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

La puissance de cette force est $\boxed{\mathcal{P} = \vec{F}\cdot\vec{v} = 0}$ car $\vec{v}\wedge\vec{B} \perp \vec{v}$.

Ainsi d'après le théorème de l'énergie cinétique, E_c reste constante, <u>donc v aussi</u>.

3 - La trajectoire est un cercle comme sur la figure ci-dessous. Il faut choisir un repère polaire.

$\overrightarrow{AM} = R\vec{e}_r$, $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$.



On a aussi $\vec{v} = v\vec{e}_\theta$ avec v la composante de la vitesse (pas sa norme), donc $v = R\dot{\theta}$, donc $\dot{\theta} = \dfrac{v}{R}$ et on peut remplacer dans l'accélération :

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R}\vec{e}_r.$$

On sait aussi que $\ddot{\theta} = 0$ car $v = R\dot{\theta}$ est constant.
Calculons ensuite la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q\vec{v}\wedge\vec{B} = qv\vec{e}_\theta \wedge B\vec{e}_z = qvB\vec{e}_r.$$

On applique le principe fondamental de la dynamique à la charge (référentiel galiléen) :

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \text{donc} \quad -\frac{mv^2}{R}\vec{e}_r = qvB\vec{e}_r.$$

On en déduit que $-\dfrac{mv}{R} = qB$, donc $\boxed{R = \dfrac{-mv}{qB}.}$

(Il y a un moins, mais d'après notre schéma $v < 0$ et donc $-v = \|\vec{v}\| > 0$. On peut ne pas s'embêter avec ceci et prendre des valeurs absolues.)

Enfin d'après la question 1 on a l'expression de $\|\vec{v}\|$:

$$R = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2qU}{m}}, \quad \text{soit} \quad \boxed{R = \sqrt{\frac{2mU}{qB^2}}.}$$

4 - On trouve $OP = 2R = 14.4\,\text{cm}$ pour l'hydrogène, et $20.4\,\text{cm}$ pour le deuterium, dont la différence est largement mesurable !