Devoir Surveillé

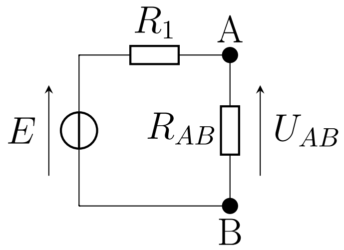
Correction – Physique-chimie – DS 2

I Double diviseur de tension

1 - R_2 et R_4 sont en série, donc équivalente à une résistance $R' = R_2 + R_4 = 30\,\Omega$.

R' et R_3 sont en parallèle, donc équivalentes à une résistance $\boxed{R_{AB} = \dfrac{R'R_3}{R'+R_3} = 12\,\Omega.}$

Schéma équivalent (question 1) :

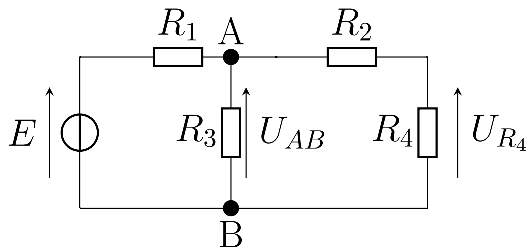


2 - ⋆ On raisonne d'abord sur le schéma équivalent où il y a R_{AB}, afin de déterminer la valeur de U_{AB}.

Un diviseur de tension donne

$$U_{AB} = E\,\frac{R_{AB}}{R_{AB}+R_1} = \frac{E}{2}.$$

Retour au schéma de départ :

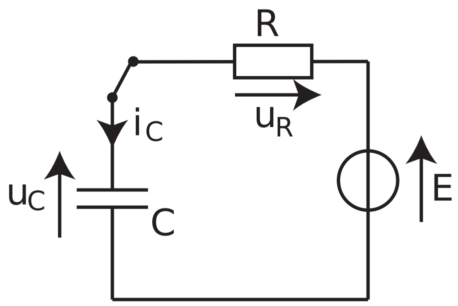


⋆ On retourne au schéma de départ. On connait U_{AB}. Un diviseur de tension permet d'obtenir U_{R_4} :

$$U_{R_4} = U_{AB}\,\frac{R_4}{R_4+R_2} = \frac{E}{2}\,\frac{2}{3}, \quad \text{soit} \quad \boxed{U_{R_4} = \frac{E}{3} = 2{,}0\,\text{V}.}$$

II Stratégies de charge d'un condensateur

3 - On reproduit la partie intéressante du circuit :



– Loi des mailles : $u_c + u_R = E$.

– Or $u_R = Ri_c$, et $i_c = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$, donc $u_R = RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

– On a donc $u_c + RC\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = E$.

– On divise par RC, on pose $\boxed{\tau = RC,}$ et on a donc l'équation : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_c}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}.}$

4 - Avant fermeture de l'interrupteur le condensateur est déchargé, donc $u_c(0^-) = 0$.

Or la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps (argument important), donc $\boxed{u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0.}$

5 - $\star$ Solution de l'équation homogène + solution particulière, c'est-à-dire

$$u_c(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + u_p.$$

On obtient la solution particulière en l'injectant dans l'équation et en la supposant constante :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}u_p}{\mathrm{d}t}}_{=0} + \frac{u_p}{\tau} = \frac{E}{\tau}, \quad \text{donc} \quad u_p = \tau\frac{E}{\tau} = E.$$

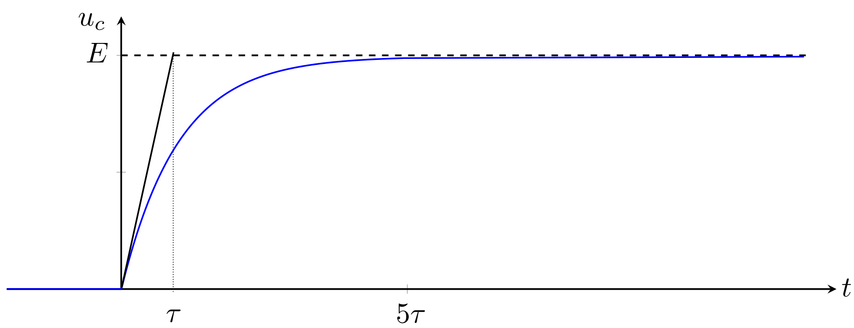
On a donc :

$$u_c(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + E.$$

$\star$ On détermine A avec les conditions initiales : $u_c(0^+) = 0$ et $u_c(0^+) = A + E$, donc $A = -E$.

$\star$ Conclusion : $u_c(t) = -E\mathrm{e}^{-t/\tau} + E$, soit $\boxed{u_c(t) = E(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}).}$

6 - Allure de la solution :



7 - Expression pour l'énergie stockée par un condensateur : $\mathcal{E}_{\text{condensateur}} = \dfrac{1}{2}Cu_c^2(t)$.

À la fin $u_c = E$, donc l'énergie stockée est $\boxed{\mathcal{E}_{\text{condensateur}} = \dfrac{1}{2}CE^2.}$

8 - Le courant i_c traverse le condensateur, donc $i_c = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$. Il faut dériver l'expression précédente de u_c :

$$i_c(t) = C \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})\right) = -CE\,\frac{-1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

Or $\tau = RC$, donc : $\boxed{i_c(t) = \dfrac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}.}$

9 - Puissance instantanée fournie par le générateur : $\mathcal{P} = u_{\text{générateur}} \times i_{\text{générateur}} = E \times i_c$.

Pour obtenir l'énergie il faut intégrer la puissance :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{fournie}} &= \int_0^{+\infty} E\times i_c(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{+\infty} E\times \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{E^2}{R}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{E^2}{R}\left[-\tau\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]_0^{+\infty}\end{aligned}$$

(suite du calcul)

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{fournie}} &= \frac{E^2}{R}\left[-\tau\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{E^2}{R}(-\tau)(0-1)\\ &= \frac{E^2}{R}RC\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{fournie}} = CE^2.}$$

10 - On a $\eta = \dfrac{\mathcal{E}_{\text{stockée}}}{\mathcal{E}_{\text{fournie}}} = \dfrac{CE^2/2}{CE^2}$, donc $\boxed{\eta = \dfrac{1}{2}.}$

Le rendement est de 50%, la moitié de l'énergie fournie est inutilement dissipée par effet Joule dans la résistance. Notons que ceci ne dépend pas de la valeur de R, donc réduire R ne change rien.

Second procédé de charge

11 - Même chose que dans la partie précédente, sauf qu'il faut remplacer E par $E/2$.

On a donc $\boxed{u_c(t) = \dfrac{E}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right).}$

12 - On sait que les 99% de la valeur finale sont atteint au bout de $\boxed{t_1 = 5\tau.}$

Si on ne s'en souvient pas, il faut le démontrer : on résout $u_c(t_1) = 0{,}99E/2$, ce qui s'écrit :

$$1-\mathrm{e}^{-t_1/\tau} = 0{,}99 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{-t_1/\tau} = 0{,}01 \;\Leftrightarrow\; -t_1/\tau = \ln(0{,}01) \;\Leftrightarrow\; t_1 = \tau\times\ln(1/0{,}01) = 4{,}6\tau.$$

13 - ⋆ La deuxième phase de charge est une charge par un générateur de tension E. Une loi des mailles montre que la tension $u_c(t)$ obéit à l'équation (idem que lors de la méthode 1) :

$$\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau},\quad \tau = RC.$$

⋆ Solution de l'équation homogène + solution particulière, c'est-à-dire

$$u_c(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + u_p.$$

On obtient la solution particulière en l'injectant dans l'équation et en la supposant constante :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}u_p}{\mathrm{d}t}}_{=0} + \frac{u_p}{\tau} = \frac{E}{\tau},\quad \text{donc}\quad u_p = \tau\frac{E}{\tau} = E.$$

On a donc :

$$u_c(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + E.$$

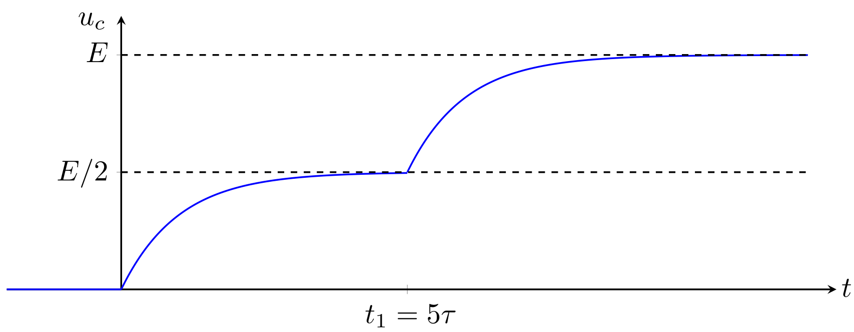
⋆ On détermine A avec les conditions initiales : $u_c(t_1) = \dfrac{E}{2}$ (par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur).

Or $u_c(t_1) = A\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + E$.

Donc $A\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + E = \dfrac{E}{2}$ donc $A\mathrm{e}^{-t_1/\tau} = -\dfrac{E}{2}$, donc $\boxed{A = -\dfrac{E}{2}\,\mathrm{e}^{t_1/\tau}.}$

⋆ Conclusion : $u_c(t) = -\dfrac{E}{2}\mathrm{e}^{t_1/\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau} + E$, soit $\boxed{u_c(t) = E\left(1 - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau}\right).}$

14 - Allure de la solution :



15 - On a $i_C(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$. On passe le détail des calculs.

⋆ Pour $t < t_1$: $\boxed{i_c(t) = \dfrac{E}{2R}\mathrm{e}^{-t/\tau}.}$ ⋆ Pour $t > t_1$: $\boxed{i_c(t) = \dfrac{E}{2R}\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau}.}$

On remarque que i_c n'est pas continue en t_1. Ceci se voyait sur le graphique de $u_c(t)$: il y a rupture de pente.

16 - Calcul similaire à la partie précédente, sauf qu'il faut distinguer les deux phases.

⋆ Première phase :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\text{fournie},1} &= \int_0^{t_1} \frac{E}{2} \times i_c(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{t_1} \frac{E}{2} \times \frac{E}{2R}\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{E^2}{4R}\int_0^{t_1} \mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{E^2}{4R}\left[-\tau\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]_0^{t_1} \\
&= \frac{E^2}{4R}(-\tau)(\underbrace{\mathrm{e}^{-t_1/\tau}}_{=\mathrm{e}^{-5}\ll 1} - 1) \\
&= \frac{E^2}{4R}RC
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{fournie},1} = \frac{CE^2}{4}.}$$

⋆ Deuxième phase :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\text{fournie},2} &= \int_{t_1}^{+\infty} E \times i_c(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{+\infty} E \times \frac{E}{2R}\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{E^2}{2R}\int_{t_1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{E^2}{2R}\left[-\tau\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau}\right]_{t_1}^{+\infty} \\
&= \frac{E^2}{2R}(-\tau)(0 - 1) \\
&= \frac{E^2}{2R}RC
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{fournie},2} = \frac{CE^2}{2}.}$$

$\star$ Bilan : $\boxed{\mathcal{E}_{\text{fournie}} = \frac{CE^2}{4} + \frac{CE^2}{2} = \frac{3}{4}CE^2.}$

17 - Quant à l'énergie stockée par le condensateur, elle vaut encore

$$\mathcal{E}_{\text{condensateur}} = \frac{1}{2}Cu_c^2(t=+\infty) = \frac{1}{2}CE^2.$$

Le rendement est donc $\eta = \frac{\mathcal{E}_{\text{stockée}}}{\mathcal{E}_{\text{fournie}}} = \frac{CE^2/2}{(3/4)CE^2}$, donc $\boxed{\eta = \frac{2}{3} = 66\%.}$

Le rendement est de 66%, ce qui est mieux qu'avec la méthode 1.

Le désavantage est que le chargement est deux fois plus long : il faut attendre deux fois 5τ.

Remarque : on peut envisager un chargement avec une efficacité de 100% si on multiplie les étapes : on charge le condensateur avec un générateur de tension E/N, puis $2E/N$, puis $3E/N$, etc... donc en N étapes, avec N très grand. On peut montrer que $\eta = N/(N+1)$. Il faut alors un temps très grand également... Ceci est à rapprocher de la réversibilité que nous verrons en thermodynamique.

III Un matériau pour la fabrication de miroirs de télescope : le carbure de silicium

18 - Carbone : $1s^2\,2s^2\,2p^2$.

19 - Si est situé juste en-dessous du carbone, donc sa configuration se termine en $3p^2$. Il s'agit donc de $1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^2$, d'où $\boxed{Z = 14.}$

20 - 14 protons et donc 14 électrons (car neutre), et $28 - 14 = 14$ neutrons.

21 - Les propriétés chimiques du carbone et du silicium sont proches car ils ont la même configuration de valence (car même colonne).

22 - Population du carbone : $\boxed{N_{\text{C}} = 4}$ (les 4 sites tétraédriques occupés).

Population du silicium : $\boxed{N_{\text{Si}} = 4}$ (détail : $N_{\text{Si}} = 8 \times 1/8 + 6 \times 1/2 = 4$).

On peut donc proposer Si_4C_4, ou plus simplement SiC.

23 - Les atomes de carbone sont en contact avec 4 atomes de silicium, donc la coordinence recherchée vaut 4.

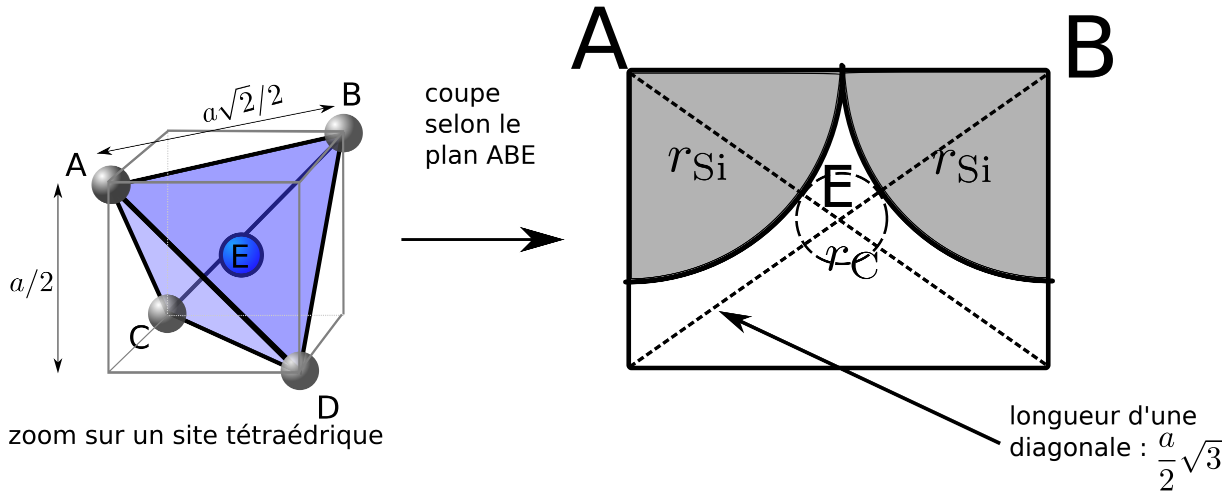
24 - Masse volumique : $\rho = \frac{4m_{\text{Si}} + 4m_{\text{C}}}{a^3}$, or par exemple $m_{\text{Si}} = \frac{M_{\text{Si}}}{N_A}$, donc

$$\boxed{\rho = \frac{4M_{\text{Si}} + 4M_{\text{C}}}{N_A a^3}.}$$

On en déduit

$$\boxed{a = \left(\frac{4M_{\text{Si}} + 4M_{\text{C}}}{N_A\rho}\right)^{1/3} = 436\,\text{pm}.}$$

25 - Il s'agit d'exprimer l'habitabilité d'un site tétraédrique. Voir figure.



La grande diagonale du cube est de longueur $a\sqrt{3}$. Or la longueur AE est un quart de cette diagonale, donc $AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

D'autre part il y a contact, donc $AE = r_{\text{C}} + r_{\text{Si}}$, d'où $\boxed{r_{\text{C}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} - r_{\text{Si}}.}$

26 - On en déduit $\boxed{r_{\text{Si}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} - r_{\text{C}} = 112\,\text{pm}.}$