Devoir Surveillé

Correction – Physique – DS 3

I Filtre ADSL

1 - Pour récupérer seulement les signaux téléphoniques il faut un filtre passe-bas.

Pour récupérer seulement les signaux informatiques il faut un filtre passe-haut.

On peut proposer une fréquence de coupure f_0 autour de $10\,\mathrm{kHz}$.

2 - À basses fréquences, les bobines sont équivalentes à des fils. On a donc $s = 0$.

À hautes fréquences, les bobines sont équivalentes à des interrupteurs ouvert. On montre alors que le courant parcourant les résistances est nul. Celles-ci ne jouent donc aucun rôle. On a donc $s = e$.

Il s'agit donc d'un filtre passe-haut.

La sortie s doit donc correspondre au signal fourni à la box internet.

3 - a - Diviseur de tension : $\boxed{\underline{s} = \underline{u} \times \dfrac{\mathrm{j}L\omega}{R + \mathrm{j}L\omega}.}$

b - Soit $\underline{Z}$ l'impédance regroupant la résistance de droite et les deux bobines.

On a $\dfrac{1}{\underline{Z}} = \dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \dfrac{1}{R + \mathrm{j}L\omega}$, soit donc $\boxed{\underline{Z} = \dfrac{\mathrm{j}L\omega(R + \mathrm{j}L\omega)}{R + 2\mathrm{j}L\omega}.}$

On réalise alors un schéma équivalent, et on voit avec un diviseur de tension que l'on a $\boxed{\underline{u} = \underline{e} \times \dfrac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R}.}$

4 - a - Pour $x = 1$ on a $\underline{H} = \mathrm{j}/3$. Donc $G_{\mathrm{dB}} = 20\log(1/3) = -20\log(3)$, et $\varphi = \pi/2$.

b - ⋆ Hautes fréquences : $\underline{H} \sim \dfrac{-x^2}{-x^2} = 1$, $\boxed{\underline{H} \sim 1.}$

⋆ Basses fréquences : $\underline{H} \sim \dfrac{-x^2}{1} = -x^2$, $\boxed{\underline{H} \sim -x^2.}$

c - ⋆ Pour le gain :

On a $G_{\mathrm{dB}} = 20\log|\underline{H}|$.

À hautes fréquences on a donc $\boxed{G_{\mathrm{dB}} \sim 20\log(1) = 0.}$

À basses fréquences $\boxed{G_{\mathrm{dB}} \sim 20\log|-x^2| = 40\,\log x,}$ soit une pente de $+40\,\mathrm{dB}$ par décade.

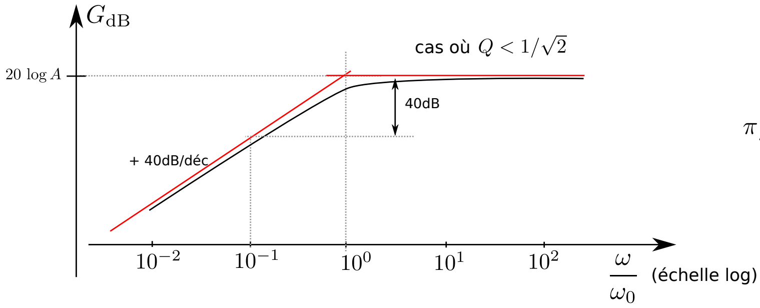
⋆ Pour la phase :

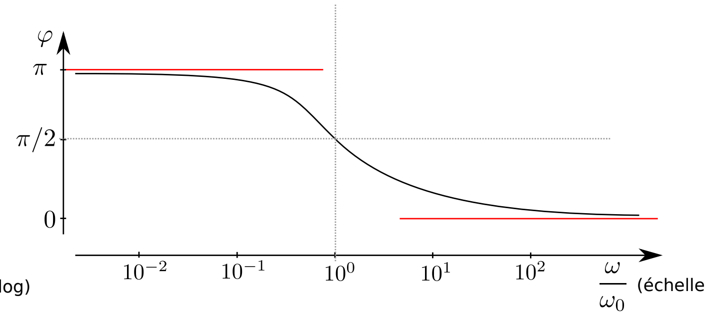
$\varphi = \arg(\underline{H})$.

À hautes fréquences on a donc $\boxed{\varphi \sim \arg(1) = 0.}$

À basses fréquences $\varphi \sim \arg(-x^2) = \pm\pi$ car il s'agit d'un réel négatif. Comme elle vaut $\pi/2$ en $x = 1$, on voit par continuité que le bon choix est $\boxed{\varphi \sim \pi.}$

d - Allure d'un filtre passe-haut du deuxième ordre, sans résonance ici :





5 - $\star$ $\boxed{|\underline{H}| = \dfrac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 9x^2}}.}$

$\star$ $\arg(\underline{H}) = \arg(-x^2) - \arg(1 - x^2 + 3\mathrm{j}x)$.

Or $\arg(-x^2) = \pi$.

Et on a $\arg(1-x^2+3\mathrm{j}x) = \arg\left(\mathrm{j} \times \left[\dfrac{1-x^2}{\mathrm{j}} + 3x\right]\right) = \arg(\mathrm{j}) + \arg\left(-\mathrm{j}(1-x^2) + 3x\right) = \dfrac{\pi}{2} + \arctan\dfrac{-(1-x^2)}{3x}$.

Donc finalement :

$$\boxed{\arg(\underline{H}) = \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{1-x^2}{3x}.}$$

Remarque : Si on n'utilise pas l'astuce de la factorisation par j, alors il faut séparer les cas :

$$\arg(\underline{H}) = \pi - \arctan\frac{3x}{1-x^2} \text{ si } x < 1 \quad \text{et} \quad \arg(\underline{H}) = -\arctan\frac{3x}{1-x^2} \text{ si } x > 1,$$

ce qui revient au même si on utilise des formules comme $\arctan(1/x) = \pi/2 - \arctan(x)$ pour $x > 0$.

II Double vitrage et isolation acoustique

II.1 Présentation de l'isolation acoustique du simple vitrage

6 - Fréquences audibles entre 20 Hz et 20 kHz.

II.2 Double vitrage : étude en régime forcé

7 - Force du ressort sur la masse 2 : $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{\mathrm{ext}}$, avec $l = x_2 - x_1$ et $\vec{u}_{\mathrm{ext}} = \vec{e}_x$, d'où : $\boxed{\vec{F} = -k(x_2 - x_1 - l_0)\vec{e}_x.}$

8 - PFD sur masse 2, projeté sur $\vec{e}_x$:

$$\boxed{m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0) - \alpha(\dot{x}_2 - \dot{x}_1),} \text{ soit } \boxed{\ddot{x}_2 + \frac{\alpha}{m_2}\dot{x}_2 + \frac{k}{m_2}x_2 = \frac{k}{m_2}x_1 + \frac{kl_0}{m_2} + \frac{\alpha}{m_2}\dot{x}_1.}$$

9 - On a $x_2 = u_2 + l_0$, donc $\dot{x}_2 = \dot{u}_2$ (car l_0 est constant) et $\ddot{x}_2 = \ddot{u}_2$.

On remplace, et après quelques simplifications on obtient :

$$\ddot{u}_2 + \frac{\alpha}{m_2}\dot{u}_2 + \frac{k}{m_2}u_2 = \frac{k}{m_2}x_1 + \frac{\alpha}{m_2}\dot{x}_1,$$

ce qui est de la forme demandée avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m_2}$, soit donc $\boxed{Q = \frac{\sqrt{km_2}}{\alpha}.}$

10 - Passage en complexes : $-\omega^2\underline{u}_2 + \frac{\omega_0}{Q}\,\mathrm{j}\omega\underline{u}_2 + \omega_0^2\underline{u}_2 = \frac{\omega_0}{Q}\,\mathrm{j}\omega\underline{x}_1 + \omega_0^2\underline{x}_1$, et on isole

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{u}_2}{\underline{x}_1} = \frac{\omega_0^2 + \mathrm{j}\dfrac{\omega\omega_0}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\dfrac{\omega\omega_0}{Q}}.}$$

11 - $$\boxed{|\underline{H}| = \frac{\sqrt{\omega_0^4 + \dfrac{\omega^2\omega_0^2}{Q^2}}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \dfrac{\omega^2\omega_0^2}{Q^2}}}.}$$

12 - Phénomène de résonance.

13 - Il suffit de trouver la position du minimum de $f(x) = (1 - x^2)^2 + x^2/Q^2$.

On dérive : $f'(x) = -4x(1 - x^2) + 2x/Q^2$.

$x = 0$ ne nous intéresse pas. Il reste $-4(1 - x^2) + 2/Q^2 = 0$, soit $\boxed{x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.}$

N'existe que si $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$, soit donc si : $\boxed{Q > 1/\sqrt{2} = 0{,}707.}$

14 - Le terme en $1/(2Q^2)$ devient vite négligeable devant 1 si $Q > 10$, d'où $x \simeq 1$ et donc $\boxed{\omega \simeq \omega_0.}$

II.3 Détermination plus fine de la fréquence de résonance

15 - $\star$ Bilan des forces sur la masse 1 :

– réaction normale $\vec{N}_1 = N_1\vec{e}_y$,

– poids $\vec{P}_1 = -m_1 g \vec{e}_y$,

– force du ressort : $\vec{F}_1 = -k(l - l_0)\vec{u}_{\text{ext},1}$ avec $l = x_2 - x_1$ la longueur du ressort, et $\vec{u}_{\text{ext},1} = -\vec{e}_x$ (va du point d'attache vers la masse m_1 étudiée, donc de la masse 2 vers la masse 1).

Le terme avec l'accélération s'écrit $m_1\ddot{x}_1\vec{e}_x$.

Le PFD va donc s'écrire :

$$m_1\ddot{x}_1\,\vec{e}_x = N_1\vec{e}_y - m_1 g\vec{e}_y - k(x_2 - x_1 - l_0)(-\vec{e}_x), \quad \text{d'où} \quad \boxed{\ddot{x}_1 = \frac{k}{m_1}(x_2 - x_1) - \frac{kl_0}{m_1}.}$$

⋆ Bilan des forces sur la masse 2 :

– réaction normale $\vec{N}_2 = N_2\vec{e}_y$,

– poids $\vec{P}_2 = -m_2 g \vec{e}_y$,

– force du ressort : $\vec{F}_2 = -k(l - l_0)\vec{u}_{\text{ext},2}$ avec $l = x_2 - x_1$ la longueur du ressort, et $\vec{u}_{\text{ext},2} = +\vec{e}_x$ (va du point d'attache vers la masse m_2 étudiée, donc de la masse 1 vers la masse 2).

Le terme avec l'accélération s'écrit $m_2\ddot{x}_2\vec{e}_x$.

Le PFD va donc s'écrire :

$$m_2\ddot{x}_2\,\vec{e}_x = N_2\vec{e}_y - m_2 g\vec{e}_y - k(x_2 - x_1 - l_0)(+\vec{e}_x), \quad \text{d'où} \quad \boxed{\ddot{x}_2 = -\frac{k}{m_2}(x_2 - x_1) + \frac{kl_0}{m_2}.}$$

16 - On fait “l'équation sur x_2 moins l'équation sur x_1”, et en posant $l = x_2 - x_1$ on obtient :

$$\boxed{\ddot{l} = -\left(\frac{k}{m_2} + \frac{k}{m_1}\right) l + \frac{kl_0}{m_2} + \frac{kl_0}{m_1}.}$$

17 - On identifie : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}}$ et $\boxed{a = l_0.}$

18 - $l(t) = \underbrace{A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t}_{l_{\text{homogène}}} + \underbrace{l_0}_{l_{\text{part}}}$.

CI 1 : $l(0) = l_0 - \delta$, donc $A + l_0 = l_0 - \delta$, donc $A = -\delta$.

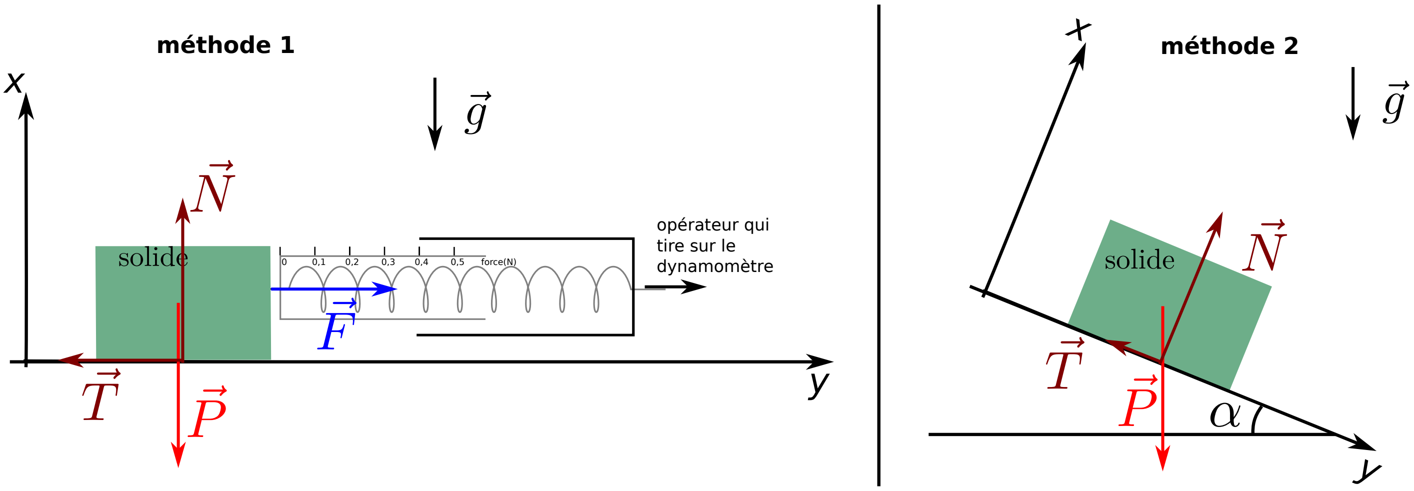
CI 2 : $\dot{l}(0) = 0$, donc $B = 0$.

Conclusion : $\boxed{l(t) = -\delta\cos\omega_0 t + l_0.}$

19 - Il faut augmenter les masses des vitres pour réduire ω_0 et le faire sortir de l'audible.

20 - Creux absents car chaque vitre a une fréquence critique différente (car une masse différente) : le creux d'une vitre est bloqué par l'autre.

III Frottements de Coulomb



Méthode 1 :

21 - Bilan des forces sur l'objet de masse m immobile (on s'aide du schéma) :

- Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_x$.
- Réaction normale du support $\vec{N} = N\vec{e}_x$.
- Réaction tangentielle du support : $\vec{T} = -T\vec{e}_y$.
- Force du dynamomètre : $\vec{F} = F\vec{e}_y$.

Le solide étant immobile, on a $\vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0}$, soit donc

$$-mg\vec{e}_x + N\vec{e}_x - T\vec{e}_y + F\vec{e}_y = \vec{0}.$$

On projette sur $\vec{e}_x$ et sur $\vec{e}_y$ pour obtenir $\boxed{N = mg}$ et $\boxed{T = F.}$

22 - L'objet reste immobile tant que $\boxed{\|\vec{T}\| \leq f\|\vec{N}\|.}$

À l'instant de la mise en mouvement, on a l'égalité $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$.

Donc on a $F = fmg$, d'où $\boxed{f = \dfrac{F}{mg}.}$

23 - A.N. : $\boxed{f = \dfrac{0{,}4}{0{,}200 \times 10} = 0{,}2.}$

Méthode 2 :

24 - Bilan des forces sur l'objet de masse m immobile (on s'aide du schéma) :

- Poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg(-\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y)$.
- Réaction normale du support $\vec{N} = N\vec{e}_x$.
- Réaction tangentielle du support : $\vec{T} = T\vec{e}_y$.

25 - Le solide étant immobile, on a $\vec{P} + \vec{N} + \vec{T} = \vec{0}$, soit donc

$$mg(-\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y) + N\vec{e}_x + T\vec{e}_y = \vec{0}.$$

On projette sur $\vec{e}_x$ et sur $\vec{e}_y$ pour obtenir $\boxed{N = mg\cos\alpha}$ et $\boxed{T = -mg\sin\alpha.}$

26 - L'objet reste immobile tant que $\boxed{\|\vec{T}\| \leq f\|N\|.}$

À l'instant de la mise en mouvement, on a l'égalité $\|\vec{T}\| = f\|N\|$.

Donc on a $mg\sin\alpha = fmg\cos\alpha$, d'où $\boxed{f = \tan\alpha.}$

27 - A.N. : $\boxed{f = \tan(20^{\mathrm{o}}) = 0{,}36.}$