

## I Double diviseur de tension

1 -  $R_2$  et  $R_4$  sont en série, donc équivalentes à une résistance  $R' = R_2 + R_4 = 30 \Omega$ .

$R'$  et  $R_3$  sont en parallèle, donc équivalentes à une résistance

$$R_{AB} = \frac{R'R_3}{R' + R_3} = 12 \Omega.$$

2 - ★ On raisonne d'abord sur le schéma équivalent où il y a  $R_{AB}$ , afin de déterminer la valeur de  $U_{AB}$ .

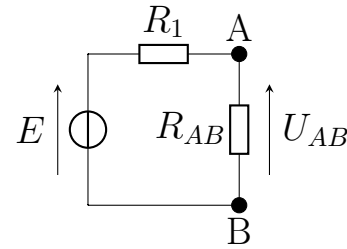
Un diviseur de tension donne

$$U_{AB} = E \frac{R_{AB}}{R_{AB} + R_1} = \frac{E}{2}.$$

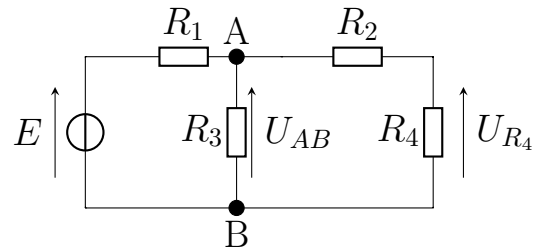
★ On retourne au schéma de départ. On connaît  $U_{AB}$ . Un diviseur de tension permet d'obtenir  $U_{R_4}$  :

$$U_{R_4} = U_{AB} \frac{R_4}{R_4 + R_2} = \frac{E}{2} \frac{2}{3}, \quad \text{soit} \quad U_{R_4} = \frac{E}{3} = 2,0 \text{ V}.$$

Schéma équivalent (question 1) :

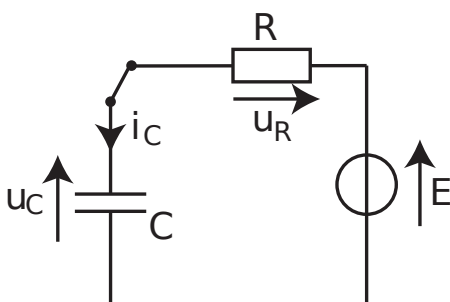


Retour au schéma de départ :



## II Stratégies de charge d'un condensateur

3 - On reproduit la partie intéressante du circuit :



– Loi des mailles :  $u_c + u_R = E$ .

– Or  $u_R = Ri_c$ , et  $i_c = C \frac{du_c}{dt}$ , donc  $u_R = RC \frac{du_c}{dt}$ .

– On a donc  $u_c + RC \frac{du_c}{dt} = E$ .

– On divise par  $RC$ , on pose  $\tau = RC$ , et on a donc

l'équation :  $\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}$ .

4 - Avant fermeture de l'interrupteur le condensateur est déchargé, donc  $u_c(0^-) = 0$ .

Or la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps (argument important), donc  $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0$ .

5 - ★ Solution de l'équation homogène + solution particulière, c'est-à-dire

$$u_c(t) = Ae^{-t/\tau} + u_p.$$

On obtient la solution particulière en l'injectant dans l'équation et en la supposant constante :

$$\underbrace{\frac{du_p}{dt}}_{=0} + \frac{u_p}{\tau} = \frac{E}{\tau}, \quad \text{donc} \quad u_p = \tau \frac{E}{\tau} = E.$$

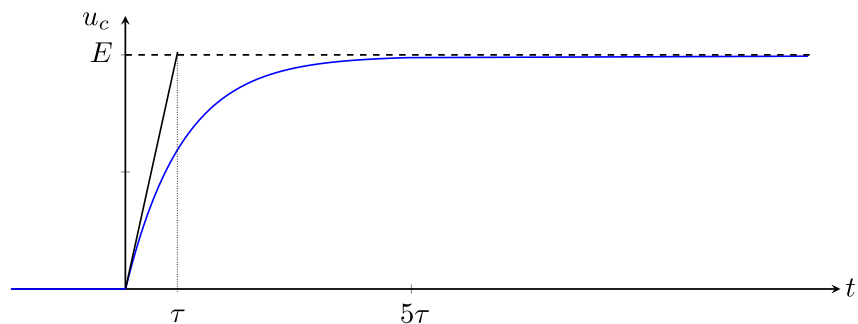
On a donc :

$$u_c(t) = Ae^{-t/\tau} + E.$$

★ On détermine  $A$  avec les conditions initiales :  $u_c(0^+) = 0$  et  $u_c(0^+) = A + E$ , donc  $A = -E$ .

★ Conclusion :  $u_c(t) = -Ee^{-t/\tau} + E$ , soit  $u_c(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$ .

6 - Allure de la solution :



7 - Expression pour l'énergie stockée par un condensateur :  $\mathcal{E}_{\text{condensateur}} = \frac{1}{2}Cu_c^2(t)$ .

À la fin  $u_c = E$ , donc l'énergie stockée est  $\mathcal{E}_{\text{condensateur}} = \frac{1}{2}CE^2$ .

8 - Le courant  $i_c$  traverse le condensateur, donc  $i_c = C \frac{du_c}{dt}$ . Il faut dériver l'expression précédente de  $u_c$  :

$$i_c(t) = C \times \frac{d}{dt} \left( E(1 - e^{-t/\tau}) \right) = -CE \frac{-1}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Or  $\tau = RC$ , donc :  $i_c(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}$ .

9 - Puissance instantanée fournie par le générateur :  $\mathcal{P} = u_{\text{générateur}} \times i_{\text{générateur}} = E \times i_c$ .  
Pour obtenir l'énergie il faut intégrer la puissance :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{fournie}} &= \int_0^{+\infty} E \times i_c(t) dt && \text{(suite du calcul)} \\ &= \int_0^{+\infty} E \times \frac{E}{R} e^{-t/\tau} dt && \mathcal{E}_{\text{fournie}} = \frac{E^2}{R} \left[ -\tau e^{-t/\tau} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{E^2}{R} \int_0^{+\infty} e^{-t/\tau} dt && = \frac{E^2}{R} (-\tau)(0 - 1) \\ &= \frac{E^2}{R} \left[ -\tau e^{-t/\tau} \right]_0^{+\infty} && = \frac{E^2}{R} RC \\ & && \boxed{\mathcal{E}_{\text{fournie}} = CE^2.} \end{aligned}$$

10 - On a  $\eta = \frac{\mathcal{E}_{\text{stockée}}}{\mathcal{E}_{\text{fournie}}} = \frac{CE^2/2}{CE^2}$ , donc  $\boxed{\eta = \frac{1}{2}}$ .

Le rendement est de 50%, la moitié de l'énergie fournie est inutilement dissipée par effet Joule dans la résistance. Notons que ceci ne dépend pas de la valeur de  $R$ , donc réduire  $R$  ne change rien.

## Second procédé de charge

11 - Même chose que dans la partie précédente, sauf qu'il faut remplacer  $E$  par  $E/2$ .

On a donc  $\boxed{u_c(t) = \frac{E}{2} (1 - e^{-t/\tau})}$ .

12 - On sait que les 99% de la valeur finale sont atteints au bout de  $\boxed{t_1 = 5\tau}$ .

Si on ne s'en souvient pas, il faut le démontrer : on résout  $u_c(t_1) = 0,99E/2$ , ce qui s'écrit :

$$1 - e^{-t_1/\tau} = 0,99 \Leftrightarrow e^{-t_1/\tau} = 0,01 \Leftrightarrow -t_1/\tau = \ln(0,01) \Leftrightarrow t_1 = \tau \times \ln(1/0,01) = 4,6\tau.$$

13 - ★ La deuxième phase de charge est une charge par un générateur de tension  $E$ . Une loi des mailles montre que la tension  $u_c(t)$  obéit à l'équation (idem que lors de la méthode 1) :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}, \quad \tau = RC.$$

★ Solution de l'équation homogène + solution particulière, c'est-à-dire

$$u_c(t) = Ae^{-t/\tau} + u_p.$$

On obtient la solution particulière en l'injectant dans l'équation et en la supposant constante :

$$\underbrace{\frac{du_p}{dt}}_{=0} + \frac{u_p}{\tau} = \frac{E}{\tau}, \quad \text{donc} \quad u_p = \tau \frac{E}{\tau} = E.$$

On a donc :

$$u_c(t) = Ae^{-t/\tau} + E.$$

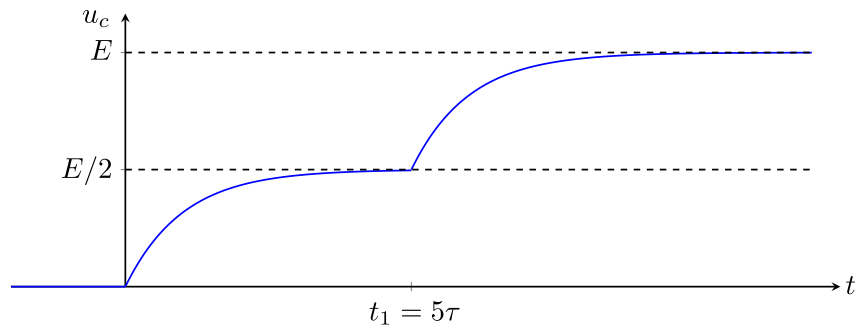
★ On détermine  $A$  avec les conditions initiales :  $u_c(t_1) = \frac{E}{2}$  (par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur).

Or  $u_c(t_1) = Ae^{-t_1/\tau} + E$ .

Donc  $Ae^{-t_1/\tau} + E = \frac{E}{2}$  donc  $Ae^{-t_1/\tau} = -\frac{E}{2}$ , donc  $\boxed{A = -\frac{E}{2} e^{t_1/\tau}}$ .

★ Conclusion :  $u_c(t) = -\frac{E}{2} e^{t_1/\tau} e^{-t/\tau} + E$ , soit  $\boxed{u_c(t) = E \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-(t-t_1)/\tau} \right)}$ .

14 - Allure de la solution :



15 - On a  $i_C(t) = C \frac{du_c}{dt}$ . On passe le détail des calculs.

$$\star \text{ Pour } t < t_1 : i_c(t) = \frac{E}{2R} e^{-t/\tau} \quad \star \text{ Pour } t > t_1 : i_c(t) = \frac{E}{2R} e^{-(t-t_1)/\tau}$$

On remarque que  $i_c$  n'est pas continue en  $t_1$ . Ceci se voyait sur le graphique de  $u_c(t)$  : il y a rupture de pente.

16 - Calcul similaire à la partie précédente, sauf qu'il faut distinguer les deux phases.

★ Première phase :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{fournie},1} &= \int_0^{t_1} \frac{E}{2} \times i_c(t) dt \\ &= \int_0^{t_1} \frac{E}{2} \times \frac{E}{2R} e^{-t/\tau} dt \\ &= \frac{E^2}{4R} \int_0^{t_1} e^{-t/\tau} dt \\ &= \frac{E^2}{4R} \left[ -\tau e^{-t/\tau} \right]_0^{t_1} \\ &= \frac{E^2}{4R} (-\tau) \underbrace{(e^{-t_1/\tau} - 1)}_{=e^{-5} \ll 1} \\ &= \frac{E^2}{4R} RC \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_{\text{fournie},1} = \frac{CE^2}{4}$$

★ Deuxième phase :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{fournie},2} &= \int_{t_1}^{+\infty} E \times i_c(t) dt \\ &= \int_{t_1}^{+\infty} E \times \frac{E}{2R} e^{-(t-t_1)/\tau} dt \\ &= \frac{E^2}{2R} \int_{t_1}^{+\infty} e^{-(t-t_1)/\tau} dt \\ &= \frac{E^2}{2R} \left[ -\tau e^{-(t-t_1)/\tau} \right]_{t_1}^{+\infty} \\ &= \frac{E^2}{2R} (-\tau)(0 - 1) \\ &= \frac{E^2}{2R} RC \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_{\text{fournie},2} = \frac{CE^2}{2}$$

$$\star \text{ Bilan : } \mathcal{E}_{\text{fournie}} = \frac{CE^2}{4} + \frac{CE^2}{2} = \frac{3}{4} CE^2$$

17 - Quant à l'énergie stockée par le condensateur, elle vaut encore

$$\mathcal{E}_{\text{condensateur}} = \frac{1}{2} C u_c^2(t = +\infty) = \frac{1}{2} CE^2$$

$$\text{Le rendement est donc } \eta = \frac{\mathcal{E}_{\text{stockée}}}{\mathcal{E}_{\text{fournie}}} = \frac{CE^2/2}{(3/4)CE^2}, \text{ donc } \eta = \frac{2}{3} = 66\%$$

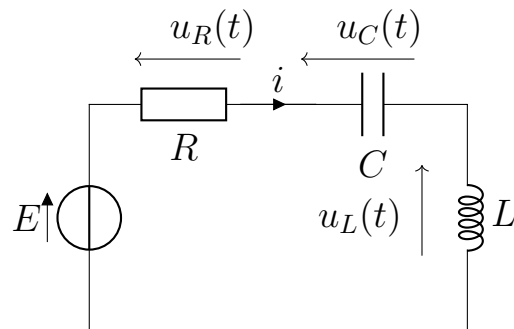
Le rendement est de 66%, ce qui est mieux qu'avec la méthode 1.

Le désavantage est que le chargement est deux fois plus long : il faut attendre deux fois  $5\tau$ .

**Remarque** : on peut envisager un chargement avec une efficacité de 100% si on multiplie les étapes : on charge le condensateur avec un générateur de tension  $E/N$ , puis  $2E/N$ , puis  $3E/N$ , etc... donc en  $N$  étapes, avec  $N$  très grand. On peut montrer que  $\eta = N/(N + 1)$ . Il faut alors un temps très grand également... Ceci est à rapprocher de la réversibilité que nous verrons en thermodynamique.

### III Production d'une tension sinusoïdale \_\_\_\_\_

On commence par refaire le schéma en indiquant les flèches de tension et de courant.



**18** - À  $t = 0^-$  on a  $i(0^-) = 0$  (car l'interrupteur est ouvert),  $u_C(0^-) = 0$  (car le condensateur est déchargé).

Or le courant traversant une bobine est nécessairement continu, donc  $i(0^+) = i(0^-) = 0$ , et idem pour la tension aux bornes d'un condensateur :  $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ .

Aux bornes de la résistance on a  $u_R(0^+) = Ri(0^+) = 0$ .

Enfin, la loi des mailles indique que pour tout  $t > 0$  on a  $u_R(t) + u_C(t) + u_L(t) = E$ , et ceci est donc aussi valable à  $t = 0^+$ , ce qui donne alors  $0 + 0 + u_L(0^+) = E$ , soit  $u_L(0^+) = E$ .

**19** - ★ Loi des mailles :  $E = Ri + u_C + u_L$ , que l'on dérive pour pouvoir utiliser  $\frac{du_C}{dt} = i/C$ .

On a alors  $0 = R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} + \frac{du_L}{dt}$ .

On remplace  $\frac{di}{dt}$  à l'aide de la relation  $u_L = L \frac{di}{dt}$  :  $0 = \frac{R}{L} u_L + \frac{i}{C} + \frac{du_L}{dt}$ .

On dérive encore pour pouvoir encore remplacer  $\frac{di}{dt}$  par  $u_L/L$  :  $0 = \frac{R}{L} \frac{du_L}{dt} + \frac{u_L}{LC} + \frac{d^2 u_L}{dt^2}$ . Ce qui se réarrange en :

$$\frac{d^2 u_L}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_L}{dt} + \frac{u_L}{LC} = 0. \quad (1)$$

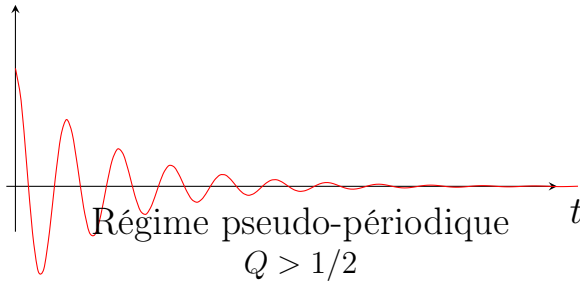
★ On identifie donc  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , et  $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$ , d'où  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

20 - Il y a production d'oscillations seulement si le régime est pseudo-périodique, donc si

$$Q > 1/2, \text{ soit donc si } R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

A.N. :  $R < 2.4 \text{ k}\Omega$ .

21 -  $u_L(t)$



Le paramètre qui donne l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations est le facteur de qualité  $Q$ . On a environ  $Q$  oscillations.

22 - On a la relation  $u_L + u_C + u_R = E$ , que l'on peut dériver :  $\frac{du_L}{dt} + \frac{du_C}{dt} + \frac{du_R}{dt} = 0$ .

On utilise ensuite  $\frac{du_R}{dt} = R \frac{di}{dt} = \frac{R}{L} u_L$ ,  $\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} i$ , d'où en fait :

$$\frac{du_L}{dt} + \frac{1}{C} i(t) + \frac{R}{L} u_L = 0.$$

Ceci est valable pour tout  $t$ , donc en particulier à la limite où  $t \rightarrow 0^+$ , donc :

$$\frac{du_L}{dt}(0^+) = -\frac{1}{C} i(0^+) - \frac{R}{L} u_L(0^+).$$

Or  $i(0^+) = 0$ , et  $u_L(0^+) = E$ , donc on obtient  $\frac{du_L}{dt}(0^+) = -\frac{RE}{L}$ .