Étude des systèmes linéaires
Chapitre 5

Correction – TD – Filtres

I Exemples de filtres ★ | [● ○ ○]

1 - ⋆ **Étude asymptotique :**

À basses fréquences, la bobine est un fil, donc $s(t) = 0$.

À hautes fréquences, le condensateur est un fil, donc $s(t) = 0$.

Il s'agit donc d'un filtre passe-bande.

⋆ **Fonction de transfert :**

Impédance équivalente à L et C en parallèle : $\dfrac{1}{\underline{Z}_{\text{éq}}} = \dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \dfrac{1}{1/\mathrm{j}C\omega} = \dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega$.

On applique ensuite un diviseur de tension :

$$\begin{aligned}\underline{s} &= \underline{e} \times \frac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{\underline{Z}_{\text{éq}} + R}\\ &= \underline{e} \times \frac{1}{1 + \dfrac{R}{\underline{Z}_{\text{éq}}}}\\ &= \underline{e} \times \frac{1}{1 + R\left(\dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega\right)}.\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + R\left(\dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega\right)}.}$$

On met sous la forme canonique du type $\boxed{\underline{H} = \dfrac{1}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}.}$ Par identification, on doit avoir :

$$\begin{cases} \dfrac{R}{L} = Q\omega_0,\\ RC = \dfrac{Q}{\omega_0}.\end{cases}$$

Après résolution, on obtient $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$.

⋆ **Diagramme de Bode, asymptotes :**

– À basses fréquences, on a

$$\underline{H} \simeq \frac{1}{-\mathrm{j}Q\dfrac{\omega_0}{\omega}} \simeq \mathrm{j}\frac{\omega}{Q\omega_0}.$$

On a donc $\boxed{G_{\text{dB}} \simeq 20\log\left|\dfrac{\mathrm{j}\omega}{Q\omega_0}\right| \simeq -20\,\log Q + 20\,\log\dfrac{\omega}{\omega_0},}$ soit donc une pente de $20\,\text{dB}$/décade et une ordonnée à l'origine qui vaut $-20\,\log Q$.

Pour la phase : $\arg\underline{H} \simeq \pi/2$.

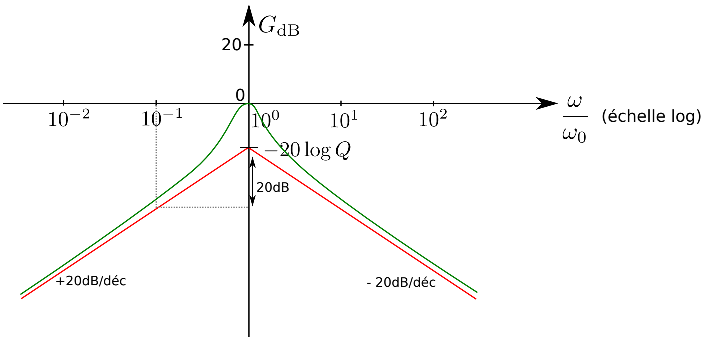
– À hautes fréquences, on a

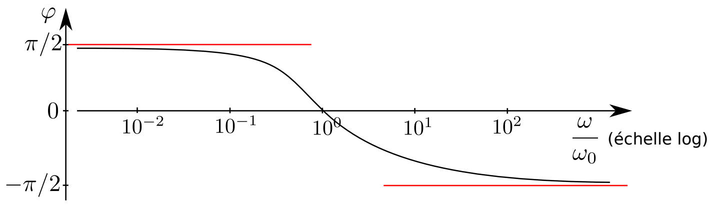
$$\underline{H} \simeq \frac{1}{\mathrm{j}Q\omega/\omega_0} \simeq \frac{-\mathrm{j}\omega_0}{Q\omega}.$$

On a donc $\boxed{G_{\mathrm{dB}} \simeq 20\log\left|\frac{-\mathrm{j}\omega_0}{Q\omega}\right| \simeq -20\,\log Q - 20\,\log\frac{\omega}{\omega_0},}$ soit donc une pente de -20 dB/décade et une ordonnée à l'origine qui vaut $-20\,\log Q$.

Pour la phase : $\arg \underline{H} \simeq -\pi/2$.

⋆ **Tracé de l'allure** (ici dans le cas où $-20\log Q < 0$) :





⋆ **Gain et déphasage :**

$$G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}.$$

$$\varphi = \arg\underline{H} = -\arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right).$$

2 - ⋆ **Étude asymptotique :**

À basses fréquences, la bobine est un fil, on a donc (loi des mailles) $s(t) = e(t)$.

À hautes fréquences, le condensateur est un fil, donc $s(t) = 0$.

Il s'agit donc d'un filtre passe-bas.

⋆ **Fonction de transfert :**

Impédance équivalente à R et C en parallèle : $\frac{1}{\underline{Z}_{\text{éq}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{1/\mathrm{j}C\omega} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega.$

On applique ensuite un diviseur de tension :

$$\begin{aligned}\underline{s} &= \underline{e} \times \frac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{\underline{Z}_{\text{éq}} + \mathrm{j}L\omega}\\ &= \underline{e} \times \frac{1}{1 + \frac{\mathrm{j}L\omega}{\underline{Z}_{\text{éq}}}}\\ &= \underline{e} \times \frac{1}{1 + \mathrm{j}L\omega\left(\frac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega\right)}.\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{\mathrm{j}L\omega}{R} - LC\omega^2}.}$$

On met sous la forme canonique du type $\boxed{\underline{H} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{\mathrm{j}}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}.}$ Par identification, on doit avoir :

$$\begin{cases} LC = \dfrac{1}{\omega_0^2}, \\ \dfrac{L}{R} = \dfrac{1}{Q\omega_0}. \end{cases}$$

Après résolution, on obtient $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$.

⋆ **Diagramme de Bode, asymptotes :**

– À basses fréquences, on a

$$\underline{H} \simeq 1.$$

On a donc $\boxed{G_{\mathrm{dB}} \simeq 20 \log 1 = 0,}$ soit donc une pente nulle.

Pour la phase : $\arg \underline{H} \simeq 0$.

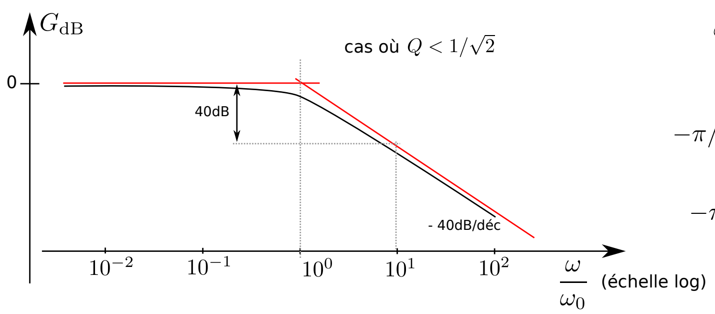
– À hautes fréquences, on a

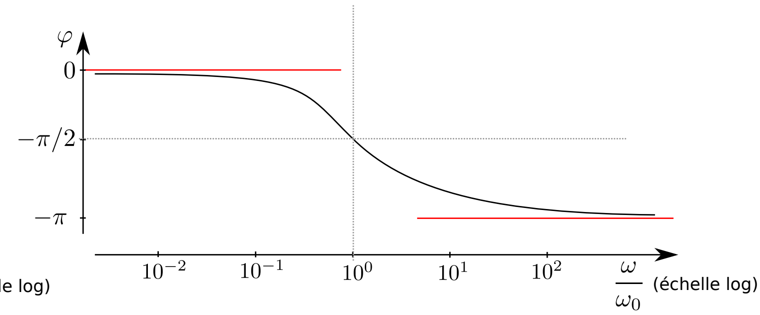
$$\underline{H} \simeq \frac{1}{-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} \simeq -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

On a donc $\boxed{G_{\mathrm{dB}} \simeq 20 \log \left|\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\right| \simeq -40 \log \dfrac{\omega}{\omega_0},}$ soit donc une pente de -40 dB/décade et une ordonnée à l'origine nulle.

Pour la phase : $\arg \underline{H} \simeq \pm\pi$. Or pour $\omega = \omega_0$ on a $\underline{H} = \dfrac{1}{\mathrm{j}/Q}$ dont l'argument est $-\pi/2$. On choisi donc un argument de $-\pi$ pour la limite haute fréquence, afin d'avoir un graphique continu.

⋆ **Tracé de l'allure :**





⋆ **Gain et déphasage :**

$$\boxed{G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\dfrac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}.}$$

Pour l'argument, on pose $x = \omega/\omega_0$ pour raccourcir les expressions. On tombe sur une partie réelle pas toujours positive, d'où l'astuce de factoriser par j :

$$\begin{aligned}
\varphi &= -\arg\left[(1-x^2)+\mathrm{j}\frac{x}{Q}\right]\\
&= -\arg\left[\mathrm{j}\left(-\mathrm{j}(1-x^2)+\frac{x}{Q}\right)\right]\\
&= -\arg\mathrm{j} - \arg\left(-\mathrm{j}(1-x^2)+\frac{x}{Q}\right)\\
&= -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{-(1-x^2)}{x/Q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi = \arctan\frac{Q(1-x^2)}{x} - \frac{\pi}{2}}$$

3 - ⋆ **Étude asymptotique :**

À basses fréquences, la bobine est un fil, on a donc $s(t)=0$.

À hautes fréquences, la bobine est un interrupteur ouvert donc il n'y a plus de courant qui circule, donc $u_R=0$, donc une loi des mailles montre que $s(t)=e(t)$.

Il s'agit donc d'un filtre passe-haut.

⋆ **Fonction de transfert :**

On applique un diviseur de tension :

$$\begin{aligned}
\underline{s} &= \underline{e}\times\frac{\mathrm{j}L\omega}{\mathrm{j}L\omega+R+\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}}\\
&= \underline{e}\times\frac{-LC\omega^2}{-LC\omega^2+\mathrm{j}RC\omega+1}.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{-LC\omega^2}{1-LC\omega^2+\mathrm{j}RC\omega}.}$$

On met sous la forme canonique du type $\boxed{\underline{H} = \dfrac{-\omega^2/\omega_0^2}{1+\dfrac{\mathrm{j}}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}.}$ Par identification, on doit avoir :

$$\begin{cases} LC = \dfrac{1}{\omega_0^2},\\ RC = \dfrac{1}{Q\omega_0}.\end{cases}$$

Après résolution, on obtient $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

⋆ **Diagramme de Bode, asymptotes :**

– À basses fréquences, on a

$$\underline{H} \simeq \frac{-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1} \simeq -\frac{\omega^2}{\omega_0^2}.$$

On a donc $\boxed{G_{\mathrm{dB}} \simeq 20\log\left|\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right| \simeq 40\,\log\dfrac{\omega}{\omega_0},}$ soit donc une pente de 40 dB/décade et une ordonnée à l'origine nulle.

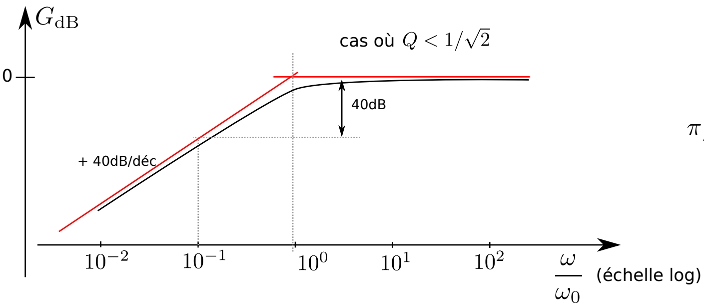
Pour la phase : $\arg\underline{H}\simeq\pm\pi$. Or pour $\omega=\omega_0$ on a $\underline{H}=\dfrac{-1}{\mathrm{j}/Q}$ dont l'argument est $\pi/2$. On choisi donc un argument de π pour la limite haute fréquence, afin d'avoir un graphique continu.

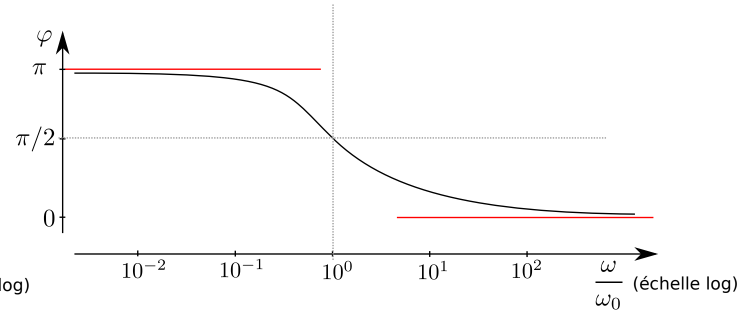
– À hautes fréquences, on a
$$\underline{H} \simeq \frac{-\omega^2/\omega_0^2}{-\omega^2/\omega_0^2} \simeq 1.$$

On a donc $\boxed{G_{\mathrm{dB}} \simeq 20\log 1 = 0,}$ soit donc une pente nulle.

Pour la phase : $\arg \underline{H} \simeq 0$.

⋆ **Tracé de l'allure :**





⋆ **Gain et déphasage :**

$$\boxed{G = |\underline{H}| = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}.}$$

Pour l'argument, on pose $x = \omega/\omega_0$ pour raccourcir les expressions. On tombe sur une partie réelle pas toujours positive, d'où l'astuce de factoriser par j :

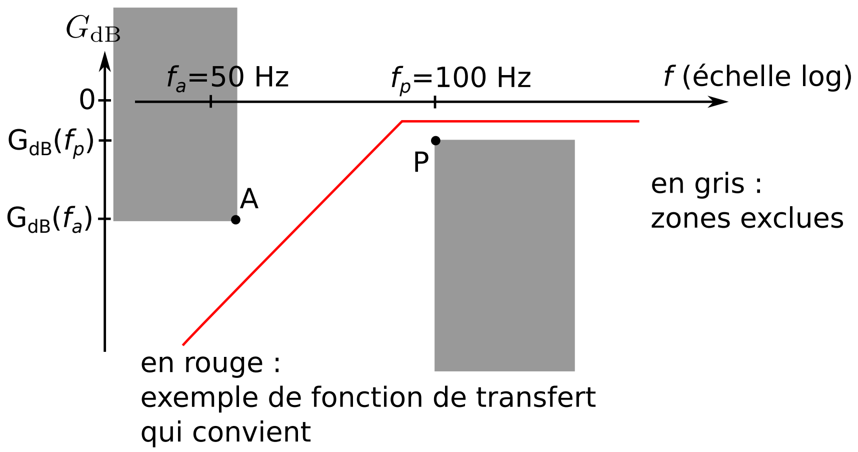
$$\begin{aligned}
\varphi &= \arg(-x^2) - \arg\left[(1-x^2) + \mathrm{j}\frac{x}{Q}\right] \\
&= \pi - \arg\left[\mathrm{j}\left(-\mathrm{j}(1-x^2) + \frac{x}{Q}\right)\right] \\
&= \pi - \arg \mathrm{j} - \arg\left(-\mathrm{j}(1-x^2) + \frac{x}{Q}\right) \\
&= \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{-(1-x^2)}{x/Q}
\end{aligned}$$
$$\boxed{\varphi = \arctan\frac{Q(1-x^2)}{x} + \frac{\pi}{2}}$$

Remarque : On peut montrer qu'on obtient le même gain qu'avec le passe-bas du second ordre à condition de faire le changement de variable $u = 1/x$. Ceci montre que la courbe va, ici aussi, exhiber une résonance si $Q \geq 1/\sqrt{2}$.

II Gabarit d'un filtre

1 - Il faut couper à basses fréquences (pour 50 Hz et moins), mais laisser passer à hautes fréquences (au-dessus de 100 Hz). Il faut donc un filtre passe-haut.

Cf schéma :



2 - Il faut calculer la pente minimale que doit avoir G_{dB} dans le diagramme de Bode. Cette pente minimale est la pente entre les points A et P ci-dessus.

Notons S_0 l'amplitude du signal de sortie, et E_0 celle du signal d'entrée.

⋆ Calculons le gain au point A. D'après l'énoncé l'amplitude du signal doit être divisée par $\sqrt{10}$: $S_0 = E_0/\sqrt{10}$. Donc $\dfrac{S_0}{E_0} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. Donc

$$G_{\mathrm{dB}}(f_a) = 20\log|\underline{H}| = 20\log\frac{S_0}{E_0} = 20\log\frac{1}{\sqrt{10}} = -10\,\mathrm{dB}.$$

⋆ Calculons le gain au point P. On a de même : Donc

$$G_{\mathrm{dB}}(f_p) = 20\log|\underline{H}| = 20\log\frac{S_0}{E_0} = 20\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -3\,\mathrm{dB}.$$

⋆ La pente entre A et P est donc :

$$\text{pente} = \frac{\text{accroissement des y}}{\text{accroissement des x}} = \frac{G_{\mathrm{dB}}(f_p) - G_{\mathrm{dB}}(f_a)}{\log f_p - \log f_a} = 23\,\mathrm{dB/décade}.$$

(attention, comme c'est une échelle log en abscisse, on calcule la pente en divisant par l'accroissement de $\log f$, et non pas de f)

Cette pente est supérieure à $20\,\mathrm{dB/déc}$, donc un filtre d'ordre 1 n'est pas assez pentu.

III Filtrage d'un signal créneau

On voit que le filtre coupe les basses fréquences et les hautes fréquences, mais laisse passer l'harmonique qui est vers $100\,\mathrm{Hz}$: il s'agit donc d'un filtre passe-bande. On peut avancer que :

- Sa fréquence centrale est $f_0 \simeq 100\,\mathrm{Hz}$.
- Sa bande passante est $\Delta f \leq 150 - 50 = 100\,\mathrm{Hz}$ car le filtre coupe bien l'harmonique à $50\,\mathrm{Hz}$ et celle à $150\,\mathrm{Hz}$.

IV Association de filtres [• • ○]

V Filtre à pont de Wien [• ○ ○]

$$\underline{H} = \frac{\underline{v}}{\underline{u}} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}, \quad \begin{cases} \omega_0 = 1/(RC) \\ H_0 = Q = 1/3 \end{cases}$$

VI Étude d'un bloc filtre [• • ○]

1 -

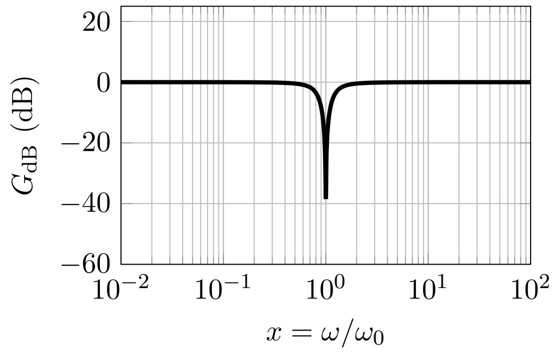
2 - **a.** • $\boxed{\underline{H} \underset{\omega\to 0}{\sim} 1.}$ • $\boxed{\underline{H}(\mathrm{j}\omega_0) = 0.}$ • $\underline{H} \underset{\omega\to+\infty}{\sim} \dfrac{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$, soit $\boxed{\underline{H} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1.}$

b. On rappelle que $G_{\mathrm{dB}} = 20\log|\underline{H}|$ (ne pas oublier le module). On reprend donc les expressions précédentes de $\underline{H}$.

- $\boxed{G_{\mathrm{dB}} \underset{\omega\to 0}{\sim} 0}$ (car $\log(1) = 0$).
- $\boxed{G_{\mathrm{dB}} \underset{\omega\to\omega_0}{\to} -\infty}$ (car $\log(x) \to -\infty$ pour $x \to 0$).
- $\boxed{G_{\mathrm{dB}} \underset{\omega\to+\infty}{\sim} 0}$ (car $\log(1) = 0$).

c.

Ci-contre le diagramme de Bode en gain tracé pour une valeur $Q = 2$. Ce tracé numérique ne le montre pas, mais la courbe doit bien tendre vers moins l'infini en $\omega = \omega_0$.
Il s'agit d'un filtre coupe-bande, car il laisse passer les basses et hautes fréquences, mais coupe autour d'une pulsation ω_0.



3 - ⋆ Le condensateur et la bobine sont en parallèles et sont équivalents à une impédance $\underline{Z}_{\text{éq}}$ donnée par

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{éq}}} = \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \frac{1}{1/(\mathrm{j}C\omega)} = \frac{1+\mathrm{j}C\omega\,\mathrm{j}L\omega}{\mathrm{j}L\omega},$$

d'où $\underline{Z}_{\text{éq}} = \dfrac{\mathrm{j}L\omega}{1-LC\omega^2}$.

⋆ On applique ensuite un diviseur de tension : $\underline{u_2} = \underline{u_1} \times \dfrac{R}{R+\underline{Z}_{\text{éq}}}$.

⋆ Puis il reste à réaliser les calculs :

$$\begin{aligned}\underline{u_2} &= \underline{u_1} \times \frac{R}{R+\dfrac{\mathrm{j}L\omega}{1-LC\omega^2}}\\ &= \underline{u_1} \times \frac{R(1-LC\omega^2)}{R(1-LC\omega^2)+\mathrm{j}L\omega}\\ &= \underline{u_1} \times \frac{1-LC\omega^2}{1-LC\omega^2+\mathrm{j}\dfrac{L}{R}\omega}\end{aligned}$$

⋆ On identifie ceci avec la forme de l'énoncé $\underline{H} = \dfrac{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1+\dfrac{1}{Q\omega_0}\mathrm{j}\omega - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$.

On a donc $\dfrac{1}{\omega_0^2} = LC$, d'où $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}.}$ Et $\dfrac{1}{Q\omega_0} = \dfrac{L}{R}$, soit $\boxed{Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}.}$

Remarque : Pour le circuit RLC série on a $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$. Ici c'est l'inverse. Cela reste homogène car Q est sans dimension, donc l'inverse de cette expression l'est également.