Exercice

"DM" – Correction

I La révolution de l'horloge à quartz

I.1 Étude d'un circuit à quartz

Étude du quartz

1. $\underline{i} = \dfrac{\underline{u}_e}{\underline{Z}_q}$ par définition de l'impédance.

2. Calcul de l'impédance équivalente :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\underline{Z}_q} &= \mathrm{j}C_0\omega + \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{j}C_1\omega} + \mathrm{j}L_1\omega} = \mathrm{j}C_0\omega + \frac{\mathrm{j}C_1\omega}{1 + (\mathrm{j}L_1\omega)(\mathrm{j}C_1\omega)} \\ &= \mathrm{j}C_0\omega + \frac{\mathrm{j}C_1\omega}{1 - L_1C_1\omega^2} = \frac{\mathrm{j}C_0\omega(1 - L_1C_1\omega^2) + \mathrm{j}C_1\omega}{1 - L_1C_1\omega^2} \\ &= \frac{\mathrm{j}(C_0 + C_1)\omega - \mathrm{j}C_0L_1C_1\omega^3}{1 - L_1C_1\omega^2} = \mathrm{j}(C_0 + C_1)\omega \times \frac{1 - \dfrac{C_0L_1C_1}{C_0 + C_1}\omega^2}{1 - L_1C_1\omega^2} \\ &= \mathrm{j}C_{\text{éq}}\omega\frac{1 - \omega^2/\omega_2^2}{1 - \omega^2/\omega_1^2},\end{aligned}$$

avec $\boxed{\omega_1 = \dfrac{1}{\sqrt{L_1C_1}},}$ $\boxed{\omega_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{C_0C_1}{C_0 + C_1}L_1}}}$ et $\boxed{C_{\text{éq}} = C_0 + C_1.}$

3. On a $\underline{i} = \underline{u}_e \times 1/|\underline{Z}_q|$, donc on regarde si $1/|\underline{Z}_q|$ diverge.

   On a $1/|\underline{Z}_q| \to \infty$ pour $\omega = \omega_1$, donc la fréquence de résonance est $\boxed{f_1 = \dfrac{\omega_1}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L_1C_1}}.}$

4. Soit $\underline{Z}_{\text{éq}}$ l'impédance équivalante à r, C et L en série. On a :

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}_e}{\underline{Z}_{\text{éq}}} = \frac{\underline{u}_e}{r + \mathrm{j}L_1\omega + \frac{1}{\mathrm{j}C_1\omega}} = \frac{\underline{u}_e/r}{1 + \frac{\mathrm{j}L_1\omega}{r} + \frac{1}{\mathrm{j}rC_1\omega}} = \frac{\underline{u}_e/r}{1 + \mathrm{j}\left(\frac{L_1\omega}{r} - \frac{1}{rC_1\omega}\right)}.$$

   Il faut identifier avec la forme $\dfrac{\underline{u}_e/r}{1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega}\right)}$. On a donc $\dfrac{Q}{\omega_1} = \dfrac{L_1}{r}$ et $Q\omega_1 = \dfrac{1}{rC_1}$.

La première donne $Q = \omega_1 \dfrac{L_1}{r}$, qu'on injecte dans la seconde : $\omega_1 \dfrac{L_1}{r} \times \omega_1 = \dfrac{1}{rC_1}$ soit donc $\boxed{\omega_1 = \dfrac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}.}$

Puis on trouve $\boxed{Q = \omega_1 \dfrac{L_1}{r} = \dfrac{1}{r}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}.}$

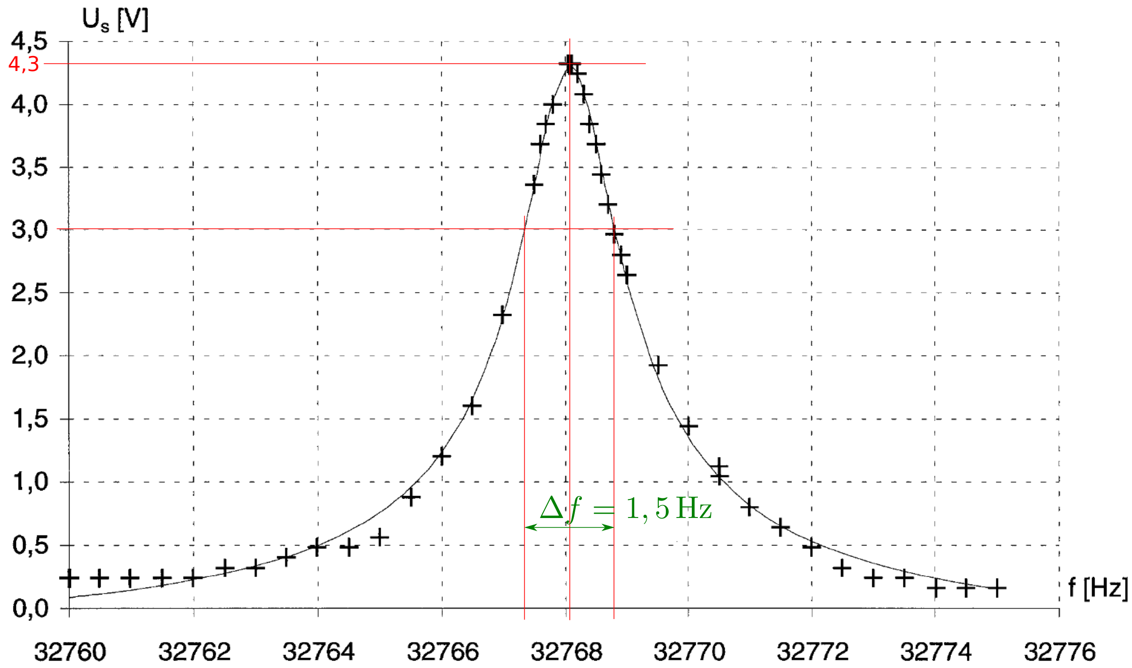
5. En utilisant l'expression précédente de $\underline{i}$, on voit qu'à la résonance (donc pour $\omega = \omega_1$) on a $\underline{i} = \dfrac{\underline{u_e}}{r}$.

   On a donc, en prenant le module, la relation suivante entre les amplitudes des signaux : $i_0 = \dfrac{u_0}{r}$.

   Or le graphique montre l'amplitude U_s, qui vaut $U_s = Ri_0$.

   Ainsi à la résonance on a $U_s = Ri_0 = \dfrac{Ru_0}{r}$.

   On lit $U_s = 4{,}3\,\mathrm{V}$, donc $\boxed{r = \dfrac{Ru_0}{U_s} = \dfrac{47\,\mathrm{k\Omega} \times 0{,}2}{4{,}3} = 2{,}2\,\mathrm{k\Omega}.}$



6. Mesure de la largeur Δf : $4{,}3\,\mathrm{V}/\sqrt{2} = 3\,\mathrm{V}$, on lit $\Delta f = 1{,}5\,\mathrm{Hz}$.

   D'où $\boxed{Q = \dfrac{32768}{1{,}5} = 22\,000 \simeq 20\,000.}$

7. On part de $\omega_1 = \dfrac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ et $Q = \dfrac{1}{r}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}$ et on isole $\boxed{L_1 = \dfrac{rQ}{\omega_1}}$ et $\boxed{C_1 = \dfrac{1}{\omega_1 r Q}.}$

8. $L_1 = 200\,\mathrm{H}$.

Cette valeur d'inductance n'est pas une valeur usuelle pour des composants électroniques. C'est normal, car il ne s'agit pas de composants réels, mais d'outils servant à modéliser la réponse mécanique du quartz.

Utilisation dans une montre

9. Il y a environ $Q = 20\,000$ oscillations libres, chacune de durée $1/f_1$, donc une durée totale $\boxed{\sim Q/f_1 \simeq 1\,\mathrm{s}.}$

   Ce n'est pas raisonnable pour fabriquer une horloge, il faut entretenir les oscillations.

10. La montre doit délivrer un signal de fréquence $1\,\mathrm{Hz}$, qui est obtenu en divisant par deux plusieurs fois de suite le signal à $32\,768\,\mathrm{Hz}$. (Une division par deux est effectuée facilement à l'aide d'un circuit logique.)

Précision

11. Pour une seconde, la variation est de $10^{-6}\,\mathrm{s}$. Sur une journée, soit $86400\,\mathrm{s}$, elle sera donc de $86\,\mathrm{ms}$.

12. C'est bien supérieur à la précision atteinte par les horloges à quartz indiquées dans la figure.

    Un moyen simple de contrôle est de placer le quartz dans une enceinte contrôlée en température.