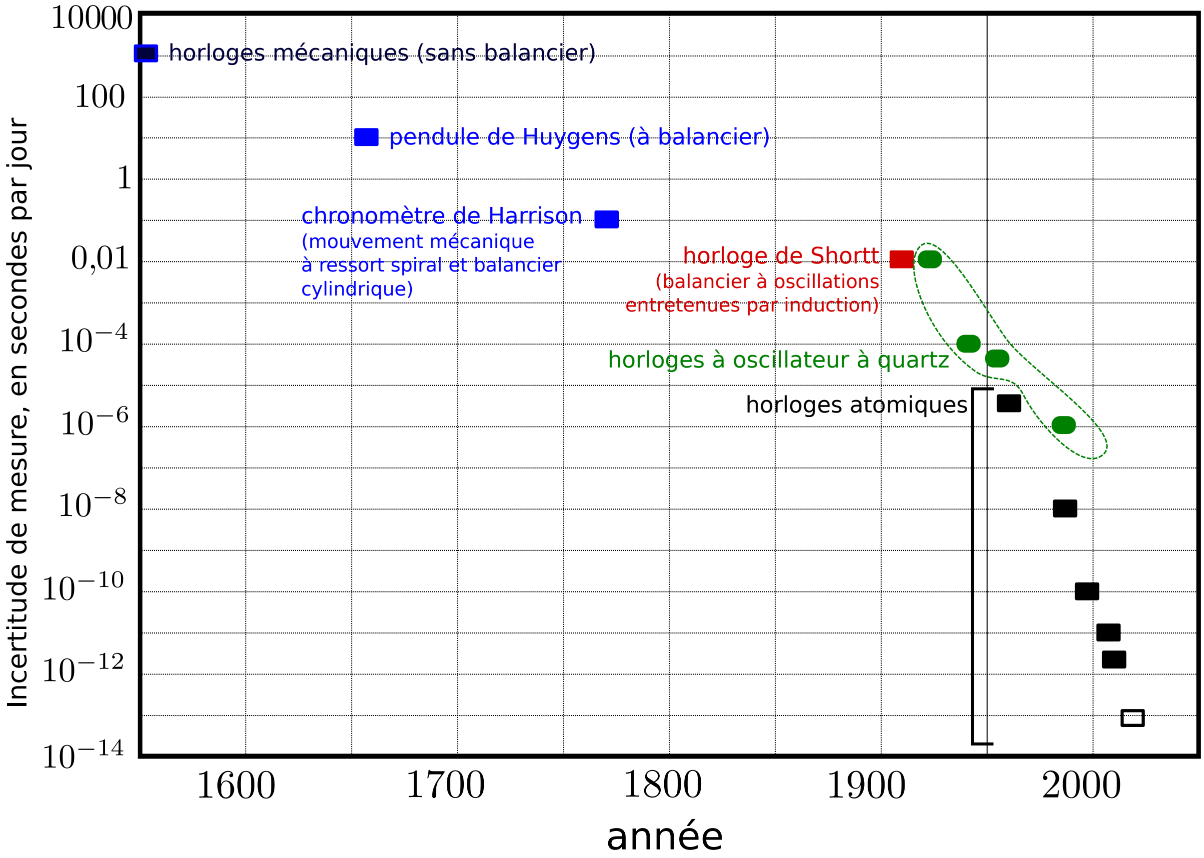
Exercice

"DM"

La mesure du temps s'est faite par des moyens divers au cours de l'histoire de l'humanité : cadrans solaires, sabliers, pendules, circuits électroniques... La précision de cette mesure s'est sans cesse améliorée, pour atteindre celle des horloges atomiques d'aujourd'hui (voir graphique ci-dessous).



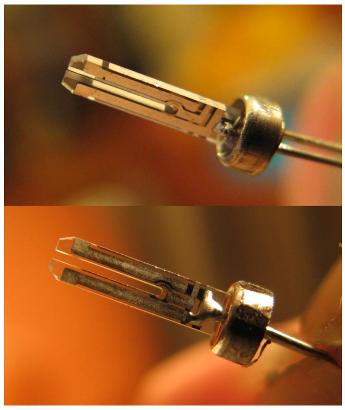
I La révolution de l'horloge à quartz

I.1 Étude d'un circuit à quartz

La première horloge à quartz est conçue en 1927 par les laboratoires Bell. La première montre-bracelet est commercialisée en 1969.

Le quartz est un cristal piézoélectrique : lorsqu'il est soumis à une différence de potentiel il se déforme, et inversement s'il est contraint mécaniquement alors une différence de potentiel apparaît entre ses faces.

Un cristal de quartz taillé en diapason – comme sur la figure ci-contre – vibre mécaniquement à une fréquence bien précise. Il est inséré dans un circuit électronique, avec une électrode métallisée sur chacune de ses faces. Cette précision dans la fréquence de vibration, associée au couplage électrique par l'effet piézoélectrique, permet d'obtenir des circuits électroniques résonants avec des facteurs de qualité très élevés, et donc des oscillateurs très précis.



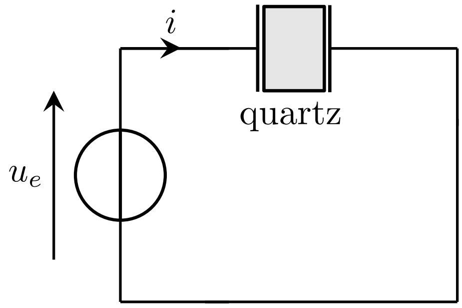
Quartz servant dans une montre.

source : https://en.wikipedia.org/wiki/Quartz_clock

Étude du quartz

Pour étudier la résonance très sélective du quartz, on le place dans le montage ci-contre.

On dispose également d'un dispositif, non représenté, qui délivre une tension U_s égale à l'amplitude du courant i multipliée par une résistance $R = 47\,\mathrm{k\Omega}$: si $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$, alors $U_s = R i_0$.

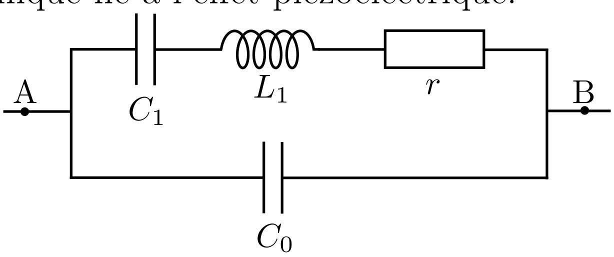


L'étude se fait en régime sinusoïdal forcé, et on utilise le formalisme complexe. On note les grandeurs complexes en les soulignant. Par exemple $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$ est représenté par $\underline{i}(t) = i_0 \exp\{\mathrm{j}(\omega t + \varphi)\}$.

1. Justifier que $\underline{i} = \dfrac{\underline{u_e}}{\underline{Z}_q}$, où $\underline{Z}_q$ est l'impédance électrique du quartz.

Électriquement, le comportement du quartz peut être modélisé par un condensateur C_0 (capacité des électrodes séparées par un diélectrique et des fils de liaisons) en parallèle avec un circuit série r, L_1 et C_1 qui correspond aux grandeurs motionnelles. Ce circuit série r, L_1, C_1 représente le couplage électromécanique lié à l'effet piézoélectrique.

On étudie les résonances, donc la recherche des pulsations ω telles que l'amplitude de i soit importante, donc telles que $1/|\underline{Z}_q|$ tende vers des valeurs importantes.

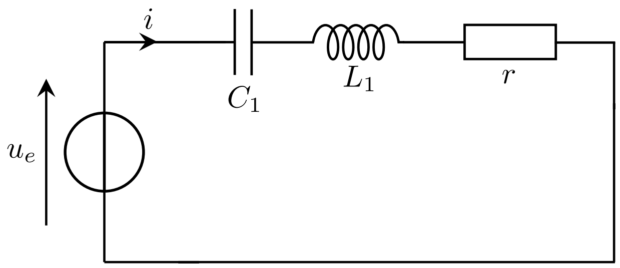


Pour repérer la résonance, on néglige d'abord tout effet dissipatif : dans les deux questions qui suivent, $r = 0$.

2. Montrer que l'impédance $\underline{Z}_q$ équivalente au dipôle A-B vérifie $\dfrac{1}{\underline{Z}_q} = \mathrm{j}C_{\text{éq}}\omega\dfrac{1-\omega^2/\omega_2^2}{1-\omega^2/\omega_1^2}$, avec $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1C_1}$ et ω_2 et $C_{\text{éq}}$ dont on donnera les expressions en fonction de C_0, C_1 et L_1.

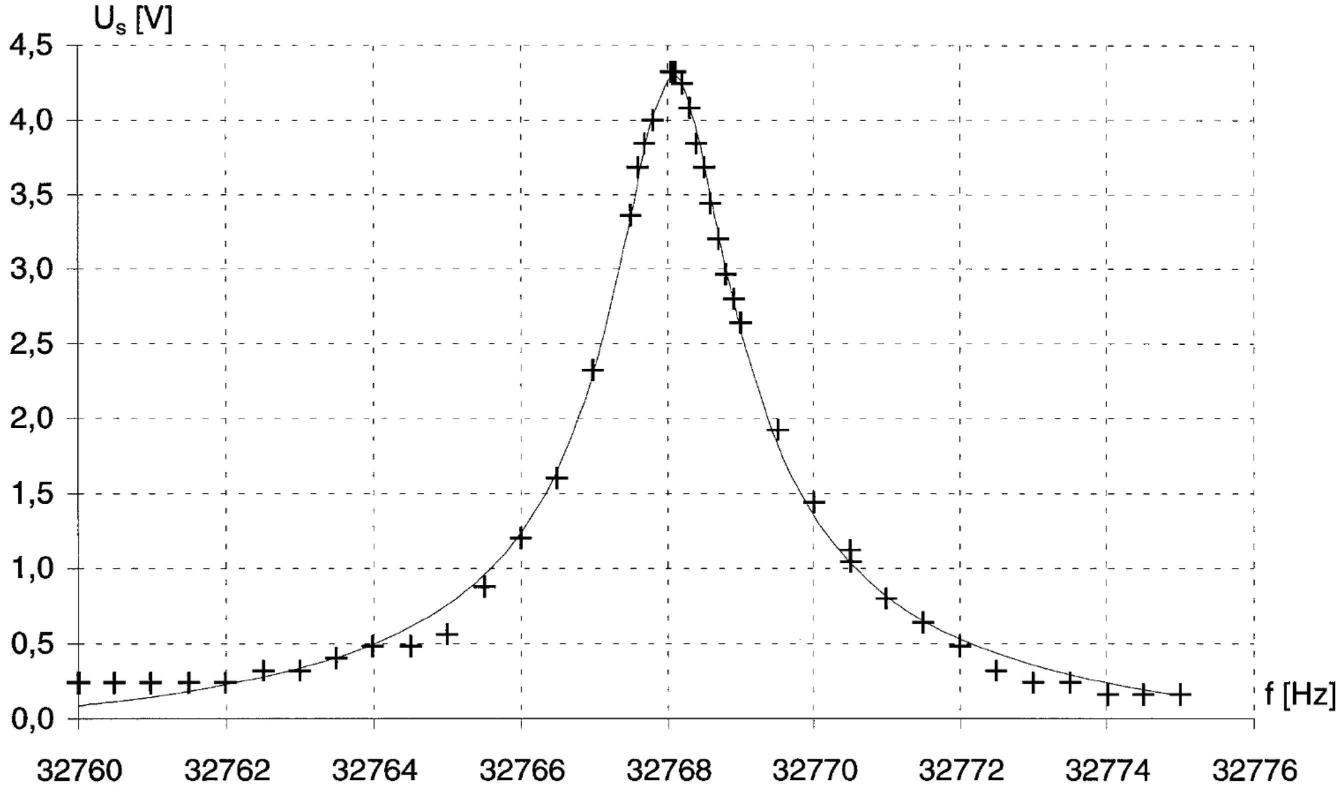
3. En déduire l'expression de la fréquence f_1 de résonance en intensité du circuit d'étude du quartz.

Les questions qui précèdent montrent que c'est la branche L_1, C_1, r qui est responsable de la résonance. Pour simplifier, on étudie donc le quartz en enlevant dans le modèle la capacité C_0. On obtient alors le circuit ci-contre.



4. Montrer que $\underline{i} = \dfrac{\underline{u}_e/r}{1+\mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_1}-\frac{\omega_1}{\omega}\right)}$ avec $Q = \dfrac{1}{r}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}$ et $\omega_1 = \dfrac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$.

La courbe ci-dessous donne, pour chaque point, la valeur de U_s pour une fréquence f donnée du signal $u_e(t)$. On rappelle que $U_s = R \times i_0$. L'amplitude du signal u_e est $u_0 = 0{,}20\,\text{V}$.



source : Deiber et al., Bull. U. Phys. 799, 1997

On donne également l'expression de l'acuité d'une résonance dans le cas étudié ici : $Q = \dfrac{f_r}{\Delta f}$, où Q est le facteur de qualité, f_r est la fréquence de résonance et Δf la largeur de la bande passante. Cette dernière est définie comme $\Delta f = |f_{c2} - f_{c1}|$, avec f_{c2} et f_{c1} les deux fréquences telles que l'amplitude de sortie soit égale à l'amplitude de sortie maximale divisée par $\sqrt{2}$.

5. En exploitant ce graphique, donner une valeur de la résistance r.

6. Donner également une valeur du facteur de qualité Q.

On retiendra les valeurs approchées $r = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $Q = 20\,000$ et $\omega_1 = 2 \times 10^5\,\mathrm{rad/s}$.

7. Donner les expressions de L_1 et C_1 en fonction de Q, r et ω_1.

8. En déduire la valeur de L_1. Commentaire ?

Utilisation dans une montre

Le quartz permet ainsi de concevoir un circuit filtre passe-bande avec un facteur de qualité très élevé.

9. Si on laisse le circuit précédent osciller de façon libre, donner une estimation du temps pendant lequel les oscillations perdurent. Ceci est-il raisonnable pour fabriquer une horloge ?

Le quartz est en réalité inséré dans un circuit dit "oscillateur", qui entretient ses oscillations. Le facteur de qualité élevé permet d'avoir un signal quasi-harmonique dont la fréquence est précisément contrôlée et vaut, dans le cas présent, $32\,768\,\mathrm{Hz}$.

10. On peut remarquer que $32\,768 = 2^{15}$. Quelle peut-être la raison d'un tel choix pour la fabrication d'une montre ?

Précision

La fréquence de résonance du quartz varie en fonction de la température, avec typiquement une variation relative $\dfrac{\Delta f}{f} \simeq 10^{-6}$ pour un écart de $10\,°\mathrm{C}$.

11. Quel est alors l'imprécision en seconde cumulée sur une journée de fonctionnement ?

12. Comparer ceci aux données de la figure de début d'énoncé. Sachant que les précisions reportées sur cette figure sont pour des horloges de laboratoire de précision, quelle précaution simple a-t-elle pu être mise en œuvre pour pallier aux variations de température ?