Devoir Surveillé

Correction – Physique-chimie – DS 6

I Trous noirs

I.1 Caractéristiques usuelles du mouvement dans un champ de gravitation

1 - On applique le théorème du moment cinétique par rapport au point fixe O :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_O}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = r\vec{e}_r \wedge F\vec{e}_r = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{\text{cst.}}}$$

2 - On sait que (propriété du produit vectoriel) $\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$.

Donc $\forall\ t$, $\overrightarrow{OM} \perp \vec{\sigma}_O$.

Donc $\forall\ t$, $\overrightarrow{OM} \perp \vec{e}_z$ (car $\vec{\sigma}_O$ est selon $\vec{e}_z$).

$\rightarrow$ Si $\overrightarrow{OM}$ reste toujours perpendiculaire à $\vec{e}_z$, c'est que le mouvement du point M est toujours contenu dans le plan Oxy.

3 - Comme d'habitude : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$, et $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}(r\vec{e}_r)}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

Ensuite :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_O &= \underbrace{r\vec{e}_r}_{\overrightarrow{OM}} \wedge m \underbrace{(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)}_{\vec{v}} \\ &= \underbrace{r\vec{e}_r \wedge \dot{r}\vec{e}_r}_{=\vec{0}} + r\vec{e}_r \wedge mr\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ &= mr^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z.\end{aligned}$$

Comme $\vec{\sigma}_O$ est constant, on en déduit que $\boxed{\forall\ t,\ r^2\dot{\theta} = \text{cst.}}$ Géométriquement, il s'agit de la loi des aires.

4 - PFD à la masse m : $m\vec{a} = F\vec{e}_r$ avec $\vec{F} = -G\dfrac{mm_0}{R^2}\vec{e}_r$.

Par dérivations successives, et car R est constant :

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r, \quad \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta, \quad \vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r.$$

Le PFD sur $\vec{e}_\theta$ indique donc que $mR\ddot{\theta} = 0$, donc $\ddot{\theta} = 0$, donc la vitesse angulaire $\boxed{\dot{\theta} = \text{cst.}}$

Ceci implique aussi que $\|\vec{v}\| = R|\dot{\theta}|$ est constante.

5 - Le PFD sur $\vec{e}_r$ indique : $-mR\dot{\theta}^2 = -G\dfrac{mm_0}{R^2}$.

On a $|\dot{\theta}| = \|\vec{v}\|/R$, donc ceci s'écrit aussi : $m\dfrac{\|\vec{v}\|^2}{R} = G\dfrac{mm_0}{R^2}$.

Donc $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{Gm_0}{R}}.}$

6 - $E_m = E_c + E_p = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{Gmm_0}{R} \underbrace{=}_{v=\sqrt{\frac{Gm_0}{R}}} \dfrac{1}{2}m\dfrac{Gm_0}{R} - \dfrac{Gmm_0}{R}$, d'où

$$\boxed{E_m = -\frac{Gmm_0}{2R} < 0.}$$

Il est normal qu'elle soit négative, puisque nous avons montré que c'est le cas pour les états liés (orbites bornées).

I.2 Modèle classique de trou noir

7 - On écrit la conservation de l'énergie mécanique entre la surface de l'astre, et une distance infinie. À distance infinie on a $r \to \infty$ et, à la limite, elle n'a plus qu'une vitesse nulle ($v = 0$). Ainsi,

$$\frac{1}{2}\,m\,v_{\text{lib}}^2 - \frac{G\,m_0\,m}{R} = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2\,G\,m_0}{R}}}$$

8 - Par définition du rayon de Schwarzschild, si l'astre a pour rayon R_{S} alors sa vitesse de libération est égale à c :

$$\boxed{R_{\text{S}} = \frac{2\,G\,m_0}{c^2}.}$$

L'astre est un trou noir si $R < R_S$.

9 -

$$\boxed{R_{\text{S,S}} = 3{,}0\,\text{km} \quad \text{et} \quad R_{\text{S,T}} = 9{,}0\,\text{mm}}$$

C'est phénoménal : imaginez toute la masse de la Terre concentrée dans une balle de babyfoot ou de ping-pong !

I.3 Trou noir supermassif

10 - On utilise la troisième loi de Kepler pour l'étoile S1 : $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_{\text{TN}}}$.

On isole la masse du trou noir : $M_{\text{TN}} = \dfrac{4\pi^2}{G}\,\dfrac{a^3}{T^2} = \dfrac{4\pi^2}{6{,}67\times10^{-11}}\,\dfrac{(3300\times1{,}5\times10^{11})^3}{(94\times365{,}25\times86400)^2} =$ $8{,}1\times10^{36}\,\text{kg}$.

Si on divise par la masse du Soleil, M_S, on obtient $M_{\text{TN}} = 4{,}1 \times 10^6\, M_S$, soit donc 4 millions de masses solaires.

11 - $D = \dfrac{\lambda}{\sin\theta} \simeq \dfrac{\lambda}{\theta} \simeq 1{,}3 \times 10^7\,\text{m}$, soit D $\simeq 13\,000\,\text{km}$.

12 - Les scientifiques n'ont pas construit un téléscope de ce diamètre ! Ils ont combiné les signaux reçus de téléscopes situés en différents points de la Terre, ce qui revient à disposer d'un téléscope dont le diamètre est de l'ordre de celui de la Terre ($2R_T \simeq 12\,800\,\text{km}$).

Illustration du principe : à gauche le miroir complet du téles-cope de la taille de la Terre, à droite seules certaines portion de ce miroir géant sont exploitées, là où il y a des radiotélescopes.

I.4 Fusion de deux trous noirs

13 - Identique à précédemment, avec une force légèrement différente (facteur $2^2 = 4$ en plus) :

$$m\frac{\|\vec{v}_1\|^2}{R} = G\frac{mm}{(2R)^2}, \quad \text{donc} \quad \boxed{v_1 = \sqrt{\frac{Gm}{4R}}.}$$

14 - $v_1 = \dfrac{\text{distance}}{\text{temps}} = \dfrac{2\pi R}{T}$, soit donc en remplaçant :

$$\sqrt{\frac{Gm}{4R}} = \frac{2\pi R}{T}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{T = \sqrt{\frac{16\pi^2 R^3}{Gm}}} \;\text{ et }\; \boxed{f^2 = \frac{1}{T^2} = \frac{m}{16\pi^2 R^3}.}$$

15 - $\boxed{E_p = -\dfrac{Gm^2}{r} = -\dfrac{Gm^2}{2R}}$ (car ainsi on a $\vec{F} = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}\,\vec{e}_r$).

16 - $E_m = \dfrac{1}{2}mv_1^2 + \dfrac{1}{2}mv_2^2 - \dfrac{Gm^2}{(2R)} = 2 \times \dfrac{1}{2}m\dfrac{Gm}{4R} - \dfrac{Gm^2}{(2R)}$, soit $\boxed{E_m = -\dfrac{Gm^2}{4R}.}$

17 - On utilise $E_m = -\dfrac{Gm^2}{4R}$ et $f^2 = \dfrac{Gm}{16\pi^2 R^3}$.

Avec la seconde relation on exprime $R = \left(\dfrac{Gm}{16\pi^2 f^2}\right)^{1/3}$, et on injecte dans la 1re :

$$E_m = -\frac{Gm^2}{4}\left(\frac{16\pi^2 f^2}{Gm}\right)^{1/3} = -\frac{(16\pi^2)^{1/3}G^{2/3}m^{5/3}}{4}\, f^{2/3}$$

On peut simplifier un peu :

$$\boxed{E_m = -\alpha\, f^{2/3} \quad \text{avec} \quad \alpha = \left(\frac{\pi G}{2}\right)^{2/3} m^{5/3}.}$$

18 - E_m décroit. Or $E_m = -\alpha f^{2/3}$, donc la fréquence f est une fonction croissante du temps (à cause du moins). Ceci se voit bien sur l'enregistrement !

On a aussi $E_m = -\dfrac{Gm^2}{4R}$, donc R décroît : les trous noirs se rapprochent et finissent par fusionner.

19 - L'idée est d'utiliser $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{2}{5}\dfrac{G^4}{c^5}\dfrac{m^5}{R^5}$ dans lequel on injecte l'expression $E_m = -\alpha f^{2/3}$ pour E_m et $R = \left(\dfrac{Gm}{16\pi^2 f^2}\right)^{1/3}$ pour R :

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\alpha f^{2/3}\right) = -\frac{2}{5}\frac{G^4}{c^5}m^5\left(\frac{Gm}{16\pi^2 f^2}\right)^{-5/3}\\
\Leftrightarrow & -\frac{2}{3}\alpha f^{2/3-1}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{5}\frac{G^4}{c^5}m^5\left(\frac{Gm}{16\pi^2}\right)^{-5/3} f^{10/3}\\
\Leftrightarrow & \frac{2}{3}\alpha\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{5}\frac{G^4}{c^5}m^5\left(\frac{Gm}{16\pi^2}\right)^{-5/3} f^{10/3}f^{1/3}.
\end{aligned}$$

C'est bien du type $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = Kf^{11/3}$.

Remarque : En détaillant les calculs on trouve $K = \dfrac{384\times 2^{1/3}}{5}\pi^{8/3}\dfrac{G^{5/3}}{c^5}m^{5/3}$. C'est en accord par exemple avec l'article https://arxiv.org/pdf/1602.03837.pdf. Tout ceci est valable dans l'approximation newtonienne (à la fois pour la formule d'émission des ondes gravitationnelles qui est valable à l'ordre le plus bas, et aussi par toute notre analyse mécanique).

20 - On l'écrit comme $f^{-11/3}\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = K$ et on primitive une fois : $\dfrac{f^{-11/3+1}}{-11/3+1} = Kt + A$ avec A une constante d'intégration.

Donc $f^{-8/3} = -\dfrac{8}{3}Kt + B$ avec B une constante. On trouve B grace à $f(t=0) = f_0$: $B = f_0^{-8/3}$.

Donc $f^{-8/3} = f_0^{-8/3} - \dfrac{8}{3}Kt$, d'où $f(t) = \left(f_0^{-8/3} - \dfrac{8}{3}Kt\right)^{-3/8}$, d'où

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\left(f_0^{-8/3} - \frac{8}{3}Kt\right)^{3/8}}}, \text{ soit aussi } f(t) = \frac{f_0}{\left(1 - \frac{8}{3}f_0^{8/3}Kt\right)^{3/8}}$$

II Freinage par induction

21 - Certains rayons évoluent dans un champ magnétique. C'est similaire au dispositif des rails de Laplace : il va y avoir apparition d'une fem et d'un courant induit.

La loi de Lenz indique que les forces de Laplace associées vont s'opposer au mouvement de la roue : c'est un effet de freinage.

22 - Force de Laplace : $\vec{F}_L = i_0 L \vec{e}_r \wedge B\vec{e}_x$, d'où $\boxed{\vec{F}_L = -i_0 L B \vec{e}_\theta.}$

Point d'application : le milieu du rayon.

23 - Attention au point d'application qui est au milieu :

$$\vec{\Gamma}_O(\vec{F}_L) = \frac{L}{2}\vec{e}_r \wedge \vec{F}_L = \frac{L}{2}\vec{e}_r \wedge (-i_0 L B)\vec{e}_\theta, \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{\Gamma}_O(\vec{F}_L) = -\frac{i_0 B L^2}{2}\vec{e}_x.}$$

24 - Pour avoir le moment total on somme sur les $N/2$ rayons immergés dans le champ magnétique :

$$\boxed{\Gamma_{Ox,L} = -\frac{i_0 B L^2 N}{4}.} \tag{1}$$

25 - $\boxed{\mathcal{P}_L = \Gamma_{Ox,L}\,\omega = -\frac{i_0 B L^2 N \omega}{4}.}$

26 -

$$\mathcal{P}_L + \frac{N}{2} e\, i_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = \frac{B L^2 \omega}{2}.}$$

27 - Loi des nœuds au niveau du moyeu O : $\dfrac{N}{2} i_0 + \dfrac{N}{2} i_1 = 0$, donc $\boxed{i_0 = -i_1.}$

28 - Loi des mailles en partant de la circonférence, en passant par un rayon parcouru par i_0, puis un rayon parcouru par i_1 (on est alors revenu à la circonférence) :

$$0 = -R i_0 + e + R i_1, \quad \text{donc} \quad 0 = -R i_0 + e - R i_0,$$

soit donc $\boxed{i_0 = \dfrac{e}{2R} = \dfrac{B L^2}{4R}\omega.}$

29 - On reprend l'expression de $\Gamma_{Ox,L}$ et on injecte celle de i_0 pour obtenir :

$$\boxed{\Gamma_{Ox,L} = -K\omega \quad \text{avec} \quad K = \frac{N B^2 L^4}{16 R}.}$$

Signe moins : ce moment est résistant, conformément à la loi de Lenz.

30 - Théorème du moment cinétique appliqué à la roue selon l'axe Ox :

$$\frac{\mathrm{d}J\omega}{\mathrm{d}t} = \Gamma_{Ox,L}, \quad \text{soit} \quad \dot{\omega} + \frac{K}{J}\omega = 0.$$

Ceci fait apparaître la constante de temps $\tau = \dfrac{J}{K}$. Solution :

$$\omega(t) = \omega_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

31 - Si toute la roue est immergée dans le champ magnétique $B\vec{e}_x$ uniforme, alors il y a apparition d'un courant i_0 identique dans les N rayons. Mais la loi des nœuds au niveau du moyeu donne $Ni_0 = 0$, donc $i_0 = 0$: ce courant ne peut pas circuler.

Il faut donc un champ non uniforme pour permettre au courant de “boucler” quelque part.

32 - Avantages : pas d'usure mécanique car pas de frottements directs, échauffement moins violent qu'avec les freins conventionnels car il se produit dans tout le volume et pas uniquement à la surface, pas de blocage possible de la roue car l'effet s'arrête si la roue ne tourne pas.

Désavantage : couteux et lourd, et il s'agit uniquement d'un ralentisseur car l'effet est proportionnel à ω et ne peut donc pas servir à produire un arrêt complet.